p-ISSN : 2443-0366
e-ISSN : 2528-0279

PERILAKU SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LOTKA-VOLTERRA DENGAN WAKTU TUNDA

Silva Humaira[1}], Pardomuan Sitompul[2}]
[1,2}] FMIPA, Universitas Negeri Medan
e-mail: silvahumaira@gmail.com
e-mail: muanstp@gmail.com

ABSTRAK

Penelitian ini membahas perilaku sistem persamaan Lotka-Volterra dengan waktu tunda. Pembahasan dilakukan terhadap hasil simulasi Matlab dengan menggunakan metode Forward Euler. Dari hasil pengamatan yang telah dilakukan pada simulasi untuk beberapa nilai parameter dapat dilihat adanya hubungan antara waktu tunda dengan perilaku solusi sistem. Adanya pengaruh waktu tunda pada sistem Lotka-Volterra akan menghilangkan sifat periodik solusi. Pengaruh waktu tunda mengakibatkan siklus populasi semakin mengembang, namun kedua populasi tidak akan mengalami kepunahan. Kemudian panjang interval tunda berpengaruh terhadap laju perkembangan siklus populasi. Makin panjang interval tunda makin cepat laju perkembangan siklus populasi.

Kata kunci*: Lotka-Volterra, waktu tunda, keseimbangan, kestabilan.*

ABSTRACT

This study discusses the behavior of Lotka-Volterra equations system with time delay. The discussion conducted on Matlab simulation results using Forward Euler. From the observations that have been made on the simulation for some parameter values can be seen the relationship between the time delay with the behavior of the system solution. Their influence on the delay time Lotka-Volterra system will eliminate the periodic nature of the solution. The influence of the time delay resulted in increasingly expanding population cycle, but the two populations will become extinct. Then the long delay intervals affect the rate of development of population cycle. The longer the delay interval faster the rate of population growth cycle.

Keywords*: Lotka-Volterra, time delay,equilibrium, stability*

1. Pendahuluan

Model matematika merupakan representasi masalah dalam dunia nyata yang menggunakan bahasa matematika. Bahasa matematika yang digunakan dalam pemodelan meliputi persamaan diferensial, sistem dinamika, statistik, aljabar, analisis, teori permainan, dan lain sebagainya. Adapun salah satu yang menarik dipelajari adalah persamaan diferensial. Sampai saat ini, teori mengenai persamaan diferensial terus dikembangkan, metode yang dipakai untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial pun bermacam-macam, tergantung dari jenis persamaan diferensial yang dipelajari.

Dalam masalah biologi, sering digunakan model matematika dengan waktu tunda, yang sering disebut dengan persamaan diferensial tunda. Banyak sistem interaksi yang berlangsung dalam ekosistem alami, salah satunya adalah sistem interaksi mangsa-pemangsa (\emph{predator-prey}). Pemangsa merupakan spesies yang pada umumnya ukurannya lebih besar dibandingkan dengan mangsa, sedangkan mangsa adalah spesies yang dimangsa yang pada umumnya ukurannya lebih kecil dari pada pemangsa [11].

 p-ISSN : 2443-0366
e-ISSN : 2528-0279

Pemangsa mengontrol ledakan populasi mangsa, dan sebaliknya naik turunnya populasi hewan mangsa mengontrol populasi pemangsa. Pengontrolan populasi itu menyebabkan ekosistem selalu berada dalam keadaan seimbang. Hubungan antara mangsa dan pemangsa misalnya dalam populasi hewan, yaitu antara cicak-nyamuk, singa-kancil, serta ular-tikus [1, 6].

Para ahli dinamika populasi telah mengembangkan banyak model matematika untuk menghitung kecepatan pertumbuhan populasi, baik pertumbuhan yang hanya dipengaruhi oleh faktor internal maupun eksternal. Model-model itu antara lain, model pertumbuhan eksponensial, model pertumbuhan logistik, model interaksi mangsa-pemangsa, model interaktif kompetitif. Salah satu persamaan matematik yang telah dikembangkan adalah persamaan model Lotka-Volterra [6].

Walaupun model Lotka-Volterra tidak dapat menggambarkan secara kompleks hubungan antar spesies seperti kejadian nyata di alam, tetapi model sederhana tersebut merupakan langkah awal untuk mengetahui perilaku hubungan antara mangsa dan pemangsa dari sudut pandang matematika. Karena modelnya yang cukup sederhana menyebabkan model ini banyak digunakan sebagai dasar bagi pengembangan model yang lebih realistis. Berbagai asumsi digunakan untuk memodifikasi model interaksi persamaan Lotka-Volterra dengan mempertimbangkan faktor-faktor yang berpengaruh atas pertumbuhan masing-masing spesies mangsa dan pemangsa yang berinteraksi.

Dalam Penelitian ini direncanakan menggunakan metode numerik untuk menganalisis model dengan waktu tunda. Analisis untuk model dengan waktu tunda biasanya lebih kompleks dan metode yang telah ditemukan masih sangat sedikit. Simulasi numerik biasanya digunakan untuk menyelesaikan model dengan waktu tunda yang kompleks, dan fasilitas yang ada pada software Matlab, dapat membantu untuk memvisualisasikan solusi dari model persamaan diferensial dengan waktu tunda [8, 9].

2. Kajian Teori

Tulisan ini membahas perilaku solusi sistem Lotka-Volterra dengan waktu tunda. Pembahasan dilakukan dengan memperhatikan solusi sistem Lotka-Volterra untuk beberapa nilai parameter yang diberikan. Solusi sistem yang dimaksud dalam hal ini adalah solusi pendekatan numerik. Bagian pertama dalam bab ini akan dijelaskan tentang metode numerik yang digunakan untuk mendekati solusi system Lotka-Volterra [2, 4, 5, 7, 8, 11].

2.1.Forward Euler

Forward Euler, disebut juga sebagai *Explicit Euler*, adalah suatu skema numerik paling sederhana untuk mendekati bentuk turunan suatu fungsi.

Skema Forward Euler adalah sebagai berikut:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = F(t_n, x_n)$$

atau

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t\, F(t_n, x_n)$$

Untuk menerapkan sebuah metode Forward Euler, diperlukan data awal $x(0) = x_0$. Dari data awal yang diberikan, dapat diperoleh nilai x_1 sebagai berikut:

$$x_1 = x_0 + \Delta t F(t_0, x_0).$$

Selanjutnya nilai x_2 diperoleh dari x_1 dan nilai x_3 diperoleh dari x_2 , begitu seterusnya.

2.2.Model Lotka-Volterra

Model Lotka-Volterra merupakan suatu sistem persamaan diferensial yang mendeskripsikan populasi mangsa-pemangsa dalam suatu ekosistem tertutup.

Asumsi-asumsi yang digunakan untuk membangun model interaksi dua spesies, berdasarkan Lotka-Volterra sebagai berikut:

1. Jika populasi pemangsa diabaikan, maka laju pertumbuhan populasi mangsa akan naik secara eksponensial, diperoleh $\frac{dx}{dt} = \alpha x$, α adalah konstanta positif.
2. Jika populasi mangsa diabaikan, maka laju pertumbuhan populasi pemangsa akan menurun, diperoleh $\frac{dy}{dt} = -\gamma y$ γ adalah konstanta positif.
3. Setiap interaksi kedua populasi, akan meningkatkan pertumbuhan populasi pemangsa dan menghalangi pertumbuhan populasi mangsa. Oleh karena itu, pertumbuhan populasi pemangsa bertambah sebanyak δxy , sedangkan pertumbuhan populasi mangsa akan berkurang sebanyak −βxy dengan β ,δ konstanta

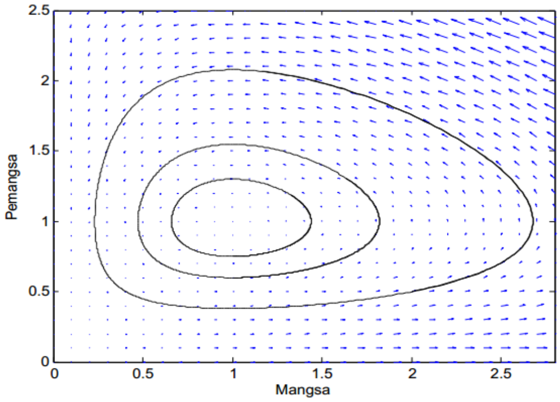
Berdasarkan asumsi-asumsi di atas dapat dibentuk sistem persamaan, yaitu :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy, \alpha, \beta > 0$$

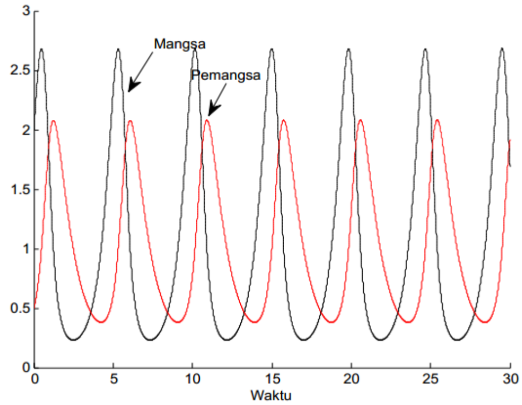
$$\frac{dy}{dt} = -\gamma x + \delta xy, \alpha, \beta > 0$$

Solusi pendekatan system persamaan Lotka-Volterra dapat ditunjukkan pada Gambar 2.1 dan Gambar 2.2. Solusi ini bergantung pada kondisi awal dan nilai-nilai parameter α=2, β=1, γ=1, δ=1.

p-ISSN : 2443-0366
e-ISSN : 2528-0279



Gambar 1. Trayektori dari model Lotka-Volterra dengan parameter α = 2, β = 1, γ =1, δ= 1



Gambar 2. Solusi periodik mangsa dan populasi pemangsa, untuk model LotkaVolterra (2.7) dengan parameter α = 2, β = 1, γ = 1, δ =1

2.3.Persamaan Diferensial Tunda

Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial tunda (Differential Delay Equation), jika pada persamaan terdapat hubungan ketergantungan antara waktu sebelumnya dan waktu sekarang. Tidak seperti pada persamaan diferensial biasa, masih sangat sedikit metode-metode yang telah ditemukan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tunda. Metode yang adapun hanya terbatas untuk menyelesaikan kasus-kasus tertentu.

Persamaan diferensial tunda merupakan salah satu jenis dari permasalahan persamaan diferensial. Misalkan kita mempunyai permasalahan persamaan diferensial biasa $x'(t) = f(t, x(t))$. Permasalahan persamaan diferensial tunda tidak hanya melibatkan suatu nilai di waktu aktual x(t), namun juga melibatkan suatu nilai di waktu yang telah lalu atau nilai di waktu yang akan datang, sehingga

dapat ditulis masalahnya menjadi $x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))$ dengan $\tau \in$ R, merupakan panjang interval waktu yang digunakan.

p-ISSN : 2443-0366
e-ISSN : 2528-0279

2.4.Persamaan Lotka-Volterra dengan Waktu Tunda

Bentuk umum sistem persamaan Lotka-Volterra dengan waktu tunda adalah :

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy(t - \tau_1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma x + \delta xy(t - \tau_2)$$

Dimana

1. $y(t - \tau_1)$adalah jumlah spesies pemangsa pada saat $t - \tau_1$ atau pada saat τ_1 waktu yang lalu.
2. $x(t - \tau_2)$adalah jumlah spesies mangsa pada saat $t - \tau_2$ atau pada saat τ_2 waktu yang lalu.

2.5.Titik Keseimbangan (*Equilibrium*)

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial autonomous sebagai berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in E \subseteq \mathbb{R}^n$$

dengan

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T, \boldsymbol{f}: E \to \mathbb{R}^n,$$

$$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$$

.

Titik keseimbangan dari sistem diatas adalah suatu solusi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga **f**(**x**)=0 [3].

3. Metode Penelitian

3.1.Jenis Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan ini adalah penelitian kepustakaan atau riset kepustakaan (library research) dan penelitian simulasi. Riset kepustakaan atau sering juga disebut studi pustaka ialah serangkaian kegiatan yang berkenaan dengan metode pengumpulan data pustaka, membaca dan mencatat serta mengolah bahan penelitian. Penelitian simulasi merupakan bentuk penelitian yang bertujuan untuk mencari gambaran melalui sebuah system berskala kecil atau sederhana [9, 10].

3.2.Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian dilakukan di Perpustakaan Universitas Negeri Medan dan Laboratorium Jurusan Matematika selama kurang lebih dua bulan. Untuk menjalankan satu program dalam penelitian ini membutuhkan waktu kurang lebih tiga hari.

p-ISSN : 2443-0366
e-ISSN : 2528-0279

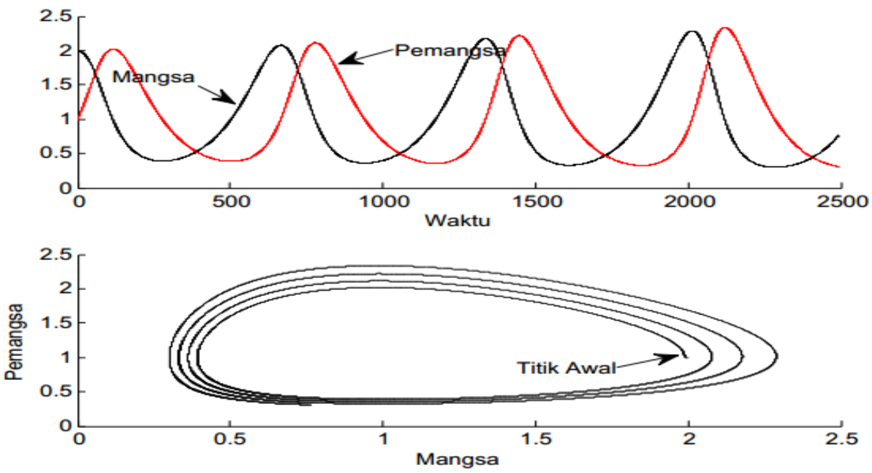
4. Hasil penelitian dan Pembahasan

4.1.Simulasi Numerik

Untuk melihat perilaku solusi sistem Lotka-Volterra dilakukan simulasi pendekatan solusi sistem Lotka-Volterra dengan nilai parameter yang berbeda. Fungsi tunda yang dibahas adalah konstan. Panjang interval tunda akan diperiksa pada τ_1=1 dan τ_2=1. Grafik solusi didekati dengan skema numerik persamaan Lotka-Volterra dengan menetapkan langkah iterasinya Δt= 10^{-2}.

Kasus	α	β	γ	δ
I	0,01	0,01	0,01	0,01
II	0,01	0,02	0,02	0,01
III	0,01	0,01	0,02	0,02
IV	0,01	0,02	0,01	0,02

Sistem Persamaan Lotka-Voterra untuk Kasus I



Gambar 3 Grafik persamaan diferensial dari persamaan mangsa-pemangsa dengan α = 0,01, β = 0,01, γ = 0, 01, δ=0, 01, x(0) = 2 dan y(0) = 1.

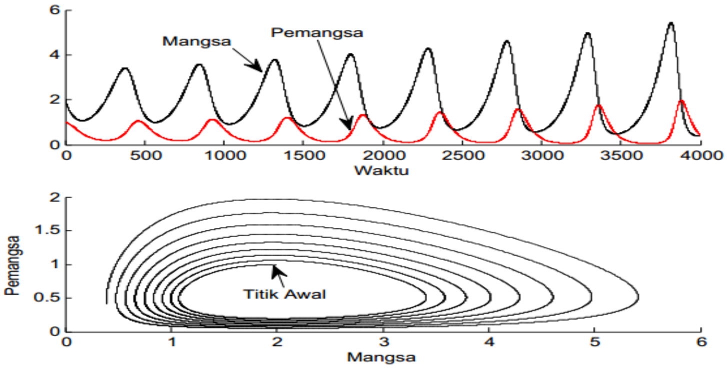
Diketahui titik keseimbangan pertama adalah

(0,0) sedangkan titik keseimbangan kedua adalah

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{0{,}01}{0{,}01}, \frac{0{,}01}{0{,}01}\right) = (1{,}1)$$

Sistem Persamaan Lotka-Voterra untuk Kasus II

p-ISSN : 2443-0366
e-ISSN : 2528-0279

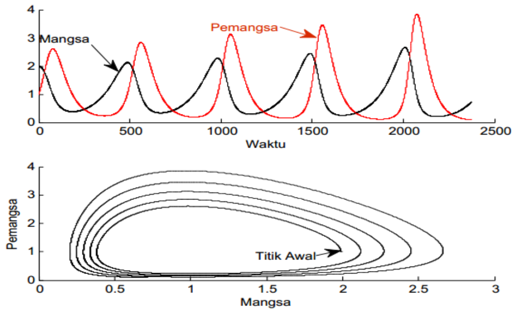


Gambar 4 Grafik persamaan diferensial dari persamaan mangsa-pemangsa dengan α = 0,01, β = 0,02, γ = 0, 02, δ=0, 01, x(0) = 2 dan y(0) = 1.

Diketahui titik keseimbangan pertama adalah (0,0) sedangkan titik keseimbangan kedua adalah

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{0{,}02}{0{,}01}, \frac{0{,}01}{0{,}02}\right) = (2, 0{,}5)$$

Sistem Persamaan Lotka-Voterra untuk Kasus III



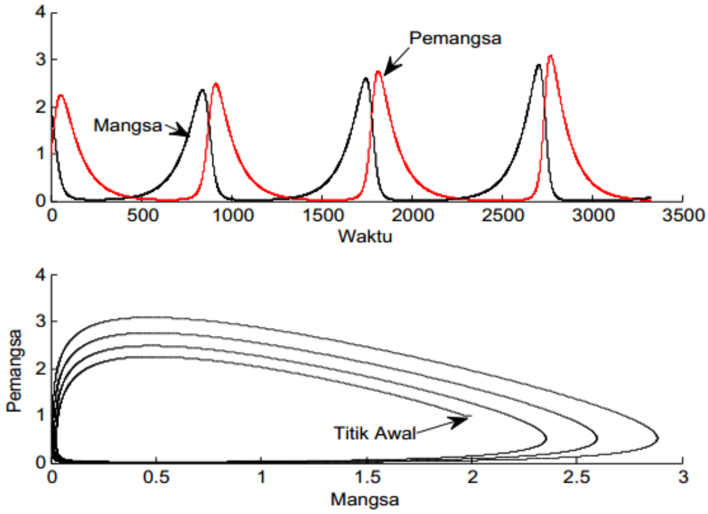
Gambar 5 Grafik persamaan diferensial dari persamaan mangsa-pemangsa dengan α = 0,01, β = 0,01, γ = 0, 02, δ=0, 02, x(0) = 2 dan y(0) = 1.

Diketahui titik keseimbangan pertama adalah (0,0) sedangkan titik keseimbangan kedua adalah

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{0{,}01}{0{,}01}, \frac{0{,}02}{0{,}02}\right) = (1{,}1)$$

Sistem Persamaan Lotka-Voterra untuk Kasus IV

p-ISSN : 2443-0366
e-ISSN : 2528-0279



Gambar 6 Grafik persamaan diferensial dari persamaan mangsa-pemangsa dengan α = 0,01, β = 0,02, γ = 0, 01, δ=0, 02, x(0) = 2 dan y(0) = 1.

Diketahui titik keseimbangan pertama adalah (0,0) sedangkan titik keseimbangan kedua adalah

$$\left(\frac{\gamma}{\delta},\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{0{,}01}{0{,}02},\frac{0{,}01}{0{,}02}\right) = (0{,}5, 0{,}5)$$

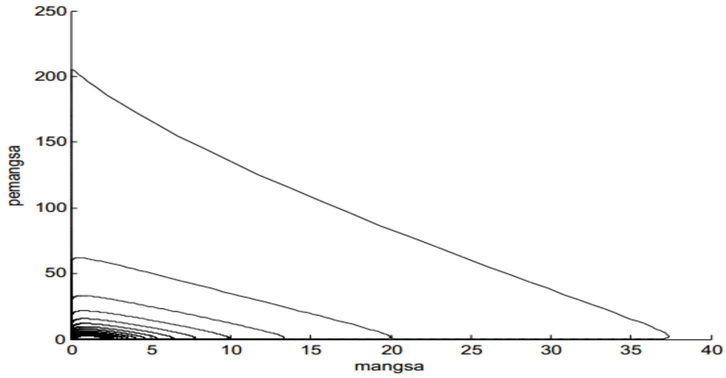
Dari ke empat kasus menunjukkan bahwa kedua populasi mangsa dan pemangsa tetap bertahan dengan jumlah populasi yang berubah-ubah secara periodik sepanjang waktu dengan periode yang berbeda. Hal ini disebabkan setiap populasi saling bergantung terhadap jumlah populasi sebelumnya. Kedua populasi akan hidup bersamaan dan tidak mengalami kepunahan pada waktu t menuju tak hingga.

4.2.Perilaku Solusi untuk t Menuju Tak Hingga

Untuk setiap kasus perilaku solusi hampir sama, yakni jumlah populasi kedua spesies berubah secara periodik namun tidak berada pada suatu siklus tertutup, melainkan siklusnya makin mengembang. Pada sub bab ini akan dilihat perilaku solusi sistem Lotka-Volterra untuk t menuju tak hingga pada panjang waktu tunda yang berbeda.

Sistem Lotka-Volterra dengan Waktu Tunda (τ = 1)

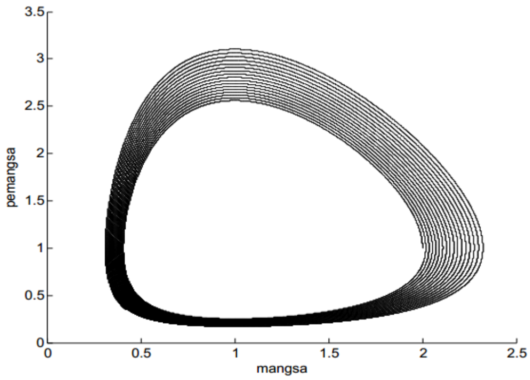
p-ISSN : 2443-0366
e-ISSN : 2528-0279



Gambar 7 Trayektori pada bidang fase dengan parameter α = 0, 01, β = 0, 01, γ = 0, 02, δ = 0, 02, x(0) = 2, y(0) = 1

Gambar ini menunjukkan bahwa solusi system Lotka-Volterra dengan waktu tunda tidak menuju pada titik keseimbangan tertentu, dan juga kurvanya tidak merupakan kurva tertutup. Semakin lama kurvanya semakin mengembang yang berarti bahwa jumlah populasi kedua spesies tetap berfluktuasi (naik-turun) namun amplitudonya semakin membesar. Hal ini dapat menyebabkan terjadinya ledakan populasi pada suatu saat. Selanjutnya akan diperiksa pada interval waktu tunda yang lebih kecil.

Sistem Lotka-Volterra dengan Waktu Tunda (τ = 0,01)



Gambar 8 Trayektori pada bidang fase dengan parameter α = 0, 01, β = 0, 01, γ = 0, 02, δ = 0, 02, x(0) = 2, dan y(0) = 1.

Pada gambar diatas dapat dilihat bahwa laju pertambahan perkembangan trayektorinya lebih lambat dibandingkan solusi sistem untuk panjang waktu tunda τ = 1. Dapat disimpulkan bahwa adanya pengaruh waktu tunda pada system persamaan Lotka-Volterra akan menghilangkan sifat solusi periodik pada system Lotka-Volterra. Waktu tunda mengakibatkan siklus solusi semakin mengembang. Panjang waktu tunda berdampak langsung pada laju pengembagan siklus solusi sistem Lotka-Volterra.

5. Kesimpulan

1. Adanya pengaruh waktu tunda pada sistem Lotka-Volterra akan menghilangkan sifat periodik solusi. Pengaruh waktu tunda mengakibatkan siklus populasi semakin mengembang, namun kedua populasi tidak akan mengalami kepunahan.

2. Panjang interval tunda berpengaruh terhadap laju perkembangan siklus populasi. Makin panjang interval tunda makin cepat laju perkembangan siklus populasi.

References

[1] Haberman, R., (1998), *Mathematical Models : Mechanical Vibrations, PopulationDynamics, and Traffic Flow*,1, Siam, Dallas.

[2] Heri, S., Dewi, R., (2005), Metode *Numerik dengan Pendekatan Algoritma*, SinarBaru Algensindo, Bandung.

[3] Perko, L., (2001), *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3, Springer,New York.

[4] Ritania, M. Leli, D., (2014), *Kestabilan Populasi Model Lotka-Volterra Tiga Spesies dengan Titik Kesetimbangan*, Kampus Binawidya Pekanbaru,1(2), 134–135.

[5] Saputra, K. V. I., (2008), *Semi-global Analysis of Lotka-Volterra Systems with Constant Terms*, La Trobe University, Victoria.

[6] Susanto, P., (2000), *Pengantar Ekologi Hewan*, Departemen Pendidikan Nasional,Jakarta.

[7] Syafruddin, S., Sutriani, H., (2015), *Penyelesaian Persamaan Lotka-Volterra dengan Metode Transformasi Diferensial*, Universitas Negeri Makassar,3(1).

[8] Toaha, S., (2008), *Model dengan Tundaan Waktu, Matematika*, Statistika, danKomputasi, 4(2), 13–14.

[9] Widiarsono, T., (2005), Tutorial Praktis Belajar Matlab, Jakarta.

[10] Wiggins, S., (2003), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, 2, Springer, Bristol.

[11] William, E. Boyce, R., (2008), *Elementary Differential Equations and BoundarynValue Problems*, 9, Department of Mathematical Sciences RensselaerPolytechnic Institute, New York