KARISMATIKA – ISSN : 2443 – 0366
TAHUN 2 VOL.1 NO. 1 APRIL 2016

SIFAT-SIFAT MODUL TERSUPLEMEN RADIKAL LEMAH LENGKAP

Didi Febrian
Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Medan
Email : febrian.didi@unimed.ac.id

ABSTRAK

Diberikan R −modul M. Submodul K dari M disebut submodul kecil dari M, ditulis $K \ll M$ jika untuk setiap submodul L dari $M, K+L=M$ berakibat $L=M$. Untuk sebarang submodul U,V dari M, submodul V merupakan suplemen dari U di M jika dan hanya jika $U+V=M$ dan $U \cap V \ll V$. Modul M disebut modul tersuplemen jika setiap submodul dari M memiliki suplemen di M. Radikal dari R −modul M merupakan penjumlahan semua submodul kecil di M, ditulis $Rad(M)$. Submodul V merupakan suplemen radikal dari U di M jika $U+V=M$ dan $U \cap V \leq Rad(V)$. Jika setiap submodul dari M memiliki suplemen radikal di M, M disebut modul tersuplemen radikal. Submodul V merupakan suplemen radikal lemah dari U di M jika $U+V=M$ dan $U \cap V \leq Rad(M)$. Modul M disebut modul tersuplemen radikal lemah jika setiap submodul dari M memiliki suplemen radikal lemah di M. Modul M disebut modul tersuplemen radikal lemah lengkap jika setiap submodul dari M merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Pada paper ini, ditunjukkan bahwa setiap modul faktor, bayangan homomorfis, jumlahan langsung berhingga dari modul tersuplemen radikal lemah lengkap merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Kata Kunci: submodul kecil, modul tersuplemen, radikal modul, modul tersuplemen radikal lemah

ABSTRACT

Let M be a R-module. A submodule K of M is called small in M,written K << M, if for every submodule L of M, K + L = M implies L = M. Let U and V be any submodules of M, V is a supplement of U in M if only if U + V = M and $U \cap V$ << V. M is called supplemented if every submodule of M has a supplement in M. Radical of a R-module M is the sum of small submodules in M, written Rad(M). Submodule V is called a Rad-supplement of U in M if U+V = M and $U \cap V \leq Rad(V)$. If every submodule of M has a Rad-supplement in M, M is called Rad- supplemented modules. Submodule V of M is called weak Rad-supplement of U in M if U + V = M and $U \cap V \leq Rad(M)$. A module M is called weakly Rad-supplemented if every submodule of M has a weak Rad-supplement in M. R-module M is called completely weak Rad-supplemented if every submodule of M is weakly Rad-supplemted. We prove that every factor module, homomorphic image and finite direct sum of completely weak Rad-supplemented is completely weak Rad-supplemented.

Keywords : small, supplement, supplemented modules, radical of modules, weakly Rad-supplemented module

PENDAHULUAN

Diberikan suatu R −modul M. Perhatikan bahwa $\{0\}+L=M$ berakibat $L=M$. Sifat submodul $\{0\}$ tersebut memberikan motivasi untuk mendefinisikan submodul yang memiliki sifat tersebut. Submodul K dari M disebut submodul kecil , dituliskan $K << M$ jika untuk setiap submodul L dari $M, K+L=M$ berakibat $L=M$. Submodul V merupakan suplemen dari U di M jika dan hanya jika $U+V=M$ dan $U \cap V << V$. Suatu modul M dikatakan modul tersuplemen jika setiap submodul dari M memiliki suplemen di M.

Radikal dari M, $Rad(M)$ dapat ditunjukkan sebagai penjumlahan dari semua submodul kecil di M. Karena $U \cap V << V$

maka $U \cap V \leq Rad(V)$. Dari fakta tersebut, dapat didefinisikan suplemen radikal, yaitu submodul V disebut suplemen radikal dari U di M jika $U + V = M$ dan $U \cap V \leq Rad(V)$. Modul M disebut modul tersuplemen radikal jika setiap submodul dari M memiliki suplemen radikal di M. Karena $Rad(V) \leq Rad(M)$ maka $U \cap V \leq Rad(M)$, akibatnya dapat didefinisikan suplemen radikal lemah sebagai berikut : Submodul V disebut suplemen radikal lemah dari U di M jika $U + V = M$ dan $U \cap V \leq Rad(M)$. Kemudian jika setiap submodul dari M memiliki suplemen radikal lemah di M maka modul M disebut modul tersuplemen radikal lemah. Jika setiap submodul dari M merupakan modul tersuplemen radikal lemah maka M disebut modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Pada paper ini, dibahas beberapa sifat yang dimiliki oleh modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

METODE PENELITIAN

Tulisan ini merupakan kajian pustaka dari beberapa buku, yaitu *Foundations of Modules and Rings* (Wisbauer, 1991), *Rings and Categories of Modules* (Anderson dan Fuller, 1992), paper yaitu *On semilocal modules and rings* (Lomp, 1996), *Generalized suplemented modules* (Wang dan Ding, 2006), *Completely Weak Rad-supplemented modules* (Nisanci, 2009) dan tesis yaitu *Cofinitely amply weakly suplemented modules* (MENEMEN, 2005) dan *Tottaly Weak Supplemented modules* (TOP, 2007). Tulisan ini melengkapi bukti yang telah diberikan oleh sumber tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini diberikan beberapa teori dasar yang dipergunakan dalam pembahasan pada bagian selanjutnya.

Definisi 1. (Adkins, 1992) Diberikan $R-$modul M dan N_i merupakan submodul dari M untuk $i = 1, 2, \cdots, n$. Modul M disebut jumlahan langsung (direct sum) dari submodul-submodul N_i, dituliskan $M = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$ jika memenuhi kondisi berikut

1. $M = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$
2. Untuk setiap $1 \leq i \leq n$ berlaku $N_i \cap \{N_1 + \cdots + N_{i-1} + N_{i+1} + \cdots + N_n\} = \{0\}$

Submodul K dari $R-$modul M disebut penjumlah langsung (direct summand) dari M jika terdapat $L \leq M$ sedemikian sehingga $M = K \oplus L$.

Definisi 2. (Adkins, 1992) Suatu R-modul M disebut modul semi sederhana jika setiap submodul dari M merupakan penjumlah langsung dari M.

Teorema 3. (Adkins, 1992) Diberikan $R-$modul M. Jika M modul semi sederhana maka setiap submodul dan modul faktor dari M merupakan modul semi sederhana.

Definisi 4. (Adkins, 1992) Diberikan $R-$modul M dan N_1, N_2 merupakan submodul dari M. Barisan $0 \to N_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N_2 \to 0$ disebut barisan eksak pendek jika homomorfisma modul f injektif, g surjektif dan $img(f) = ker(g)$.

Dari teorema utama homomorfisma modul dan f injektif diperoleh $M/N_1 \cong N_2$.

Teorema 5. Hukum Modular (Wisbauer, 1991) *Jika* $\mathrm{K}, \mathrm{H}, \mathrm{L} \leq \mathrm{M}$ *dan* $\mathrm{K} \leq \mathrm{H}$ *maka* $H \cap (K + L) = K + (H \cap L)$

Teorema 6. Teorema Korespondensi *Diberikan $R-$modul dan diberikan H, N dan K submodul dari M. Jika submodul H dan K memuat N dan berlaku $H/N = K/N$ maka $H = K$.*

Modul Tersuplemen Radikal Lemah

Perhatikan bahwa $\{0\} + L = M$ berakibat $L = M$. Sifat submodul $\{0\}$ tersebut memberikan motivasi untuk mendefinisikan submodul yang memenuhi sifat tersebut.

Definisi 7. (**Wisbauer, 1991**) Diberikan $R-$modul M dan K submodul dari M.

Submodul K dikatakan submodul kecil (small) jika untuk setiap submodul L dari $M, K + L = M$ berakibat $L = M$, dituliskan $K << M$. Ekivalen dengan mengatakan, submodul K dikatakan submodul kecil jika untuk setiap submodul sejati L dari $M, K + L \neq M$.

Berikut diberikan contoh dari submodul kecil.

Contoh 8. Submodul sejati dari $\mathbb{Z}$ −modul $\mathbb{Z}_{12}$ adalah $\{\bar{0}\}, \{\bar{0}, \bar{6}\}, \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}, \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}, \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$. Submodul $\{\bar{0}, \bar{6}\} \ll \mathbb{Z}_{12}$ karena untuk setiap K submodul sejati dari $\mathbb{Z}_{12}$, $\{\bar{0}, \bar{6}\} + K \neq \mathbb{Z}_{12}$. Submodul $\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\}$ tidak small terhadap $\mathbb{Z}_{12}$ karena ada $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$ sedemikian sehingga $\{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}\} + \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\} = \mathbb{Z}_{12}$. Submodul $\{0\}$ disebut submodul kecil trivial dari suatu modul.

Diberikan isomorfisma $f : M \to M$, akibatnya $ker(f) = \{0\}$. Mengingat $\{0\} \ll M$ maka $ker(f) \ll M$. Fakta tersebut memberikan motivasi untuk mendefinisikan epimorfisma dengan sifat tersebut sebagai berikut.

Definisi 9. (**Wisbauer, 1991**) Diberikan R −modul M, N. Suatu epimorfisma $f : M \to N$ dikatakan epimorfisma kecil jika $ker(f) \ll M$. Jika f merupakan epimorfisma kecil maka modul M disebut sampul kecil (small cover) dari N.

Pemetaan identitas $i : M \to M$ merupakan epimorfisma kecil.

Lemma 10. (**MENEMEN, 2005**) Diberikan R −modul M. Sifat-sifat berikut berlaku

1. Jika $K \leq N \leq M$ dan $K \ll N$ maka $K \ll M$.
2. Jika $N \ll M$ maka setiap submodul dari N juga submodul kecil di M.
3. Penjumlahan berhingga submodul kecil N_i dari M merupakan submodul kecil dari M.
4. Diberikan homomorfisma modul $f : M \to N$ dan $K \leq M$. Jika $K \ll M$ maka $f(K) \ll N$.

Definisi 11. (**Wisbauer, 1991**) Radikal dari R −modul M didefinisikan sebagai irisan semua submodul maksimal dari M. Radikal dari R −modul M dinotasikan dengan $Rad(M)$. Jika M tidak mempunyai submodul maksimal, maka di- tentukan $Rad(M) = M$.

Selain pendefinisian tersebut, $Rad(M)$ juga dapat ditunjukkan sebagai penjumlahan semua submodul kecil di M.

Teorema 12. (**Wisbauer, 1991**) Jika R-modul M maka berlaku

$$Rad(M) = \sum \{L \leq M | L \ll M\}$$

Selanjutnya pada lemma berikut diberikan sifat dari radikal dari suatu R −modul.

Lemma 13. (**Wisbauer, 1991**) Diberikan R −modul M. Untuk homomorfisma $f : M \to N$ berlaku $f\left(Rad(M)\right) \leq Rad(N)$. Jika f epimorfisma dan $ker(f) \leq Rad(M)$ maka $f\left(Rad(M)\right) = Rad(N)$.

Perhatikan bahwa $Rad(M)$ merupakan submodul dari M maka dapat dibentuk modul faktor $M/_{Rad(M)}$.

Definisi 14. (**Clark, 2006**) Modul M atas R disebut semilokal jika $M/_{Rad(M)}$ merupakan modul semi sederhana.

Lemma 15. (**Clark, 2006**) Diberikan R − modul M. Pernyataan-pernyataan berikut ekivalen

(a). Modul M merupakan modul semilokal.

(b). Untuk setiap $L \leq M$ terdapat $K \leq M$ sedemikian sehingga $L + K = M$ dan $L \cap K \leq Rad(M)$.

Lemma 16. Diberikan sebarang ring R. Ring R adalah semilokal jika dan hanya jika setiap R − modul adalah semilokal.

Selanjutnya diberikan definisi submodul

suplemen dan modul tersuplemen

Definisi 17. (**Wisbauer, 1991**) Diberikan U dan V submodul dari R −modul M. Submodul V dikatakan suplemen dari submodul U di M jika V adalah elemen minimal dari himpunan submodul- submodul L dari M yang memenuhi $U + L = M$. Selanjutnya V dikatakan submodul suplemen dari M jika V merupakan suplemen dari suatu submodul dari M.

Berikut ini adalah syarat perlu dan cukup suatu submodul suplemen

Lemma 3.18. (**Wisbauer, 1991**) Submodul V merupakan suplemen dari V di M jika dan hanya, jika $U + V = M$ dan $U \cap V \ll V$.

Lemma *19. (***Wisbauer, 1991***)* Diberikan R −modul M. Diberikan $U, V \leq M$ dengan V adalah suplemen dari U di M. Jika $K \ll M$ maka $K \cap V \ll V$ dan $Rad(V) = V \cap Rad(M)$

Pada sebarang modul M, tidak selalu dapat ditemukan suplemen dari suatu submodul di M. Lemma berikut menjamin hal tersebut

Lemma 20. (**TOP, 2007**) Setiap submodul sejati tak nol dari $\mathbb{Z}$ −modul $\mathbb{Z}$ tidak mempunyai suplemen.

Selanjutnya dapat didefinisikan suatu modul yang setiap submodul sejati tak nol memiliki suplemen didalam modul tersebut sebagai berikut.

Definisi 21. (**Wisbauer, 1991**) Diberikan R −modul M. Modul M disebut modul tersuplemen jika setiap submodul dari M memiliki suplemen di M.

Teorema 22. Diberikan R-modul M. Setiap penjumlah langsung dari M merupakan suplemen dari M dan memiliki suplemen di M.

Dari Teorema 22, dapat ditunjukkan bahwa modul semi sederhana merupakan modul tersuplemen. Diberikan $U \cap V \ll V$ maka $U \cap V \ll Rad(V)$. Lemma berikut menjamin hal tersebut

Lemma 23. Diberikan R −modul M dan U, V submodul dari M. Jika $U \cap V \ll V$ maka $U \cap V \ll Rad(V)$.

Bukti : Diberikan $U \cap V \ll V$. Ambil sebarang $x \in U \cap V$. Elemen x dapat dinyatakan sebagai $x = x + \{0\} + \{0\} + \cdots + \{0\}$. Karena $\{0\} \in K_i$ dengan $K_i \ll V$ maka x merupakan penjumlahan elemen-elemen dari submodul kecil di V, akibatnya $x \in Rad(V)$. Terbukti $U \cap V \ll Rad(V)$.

Dari fakta tersebut, memberikan motivasi untuk mendefinisikan modul tersuplemen radikal

Definisi 24. (Wang, 2006) Diberikan R − modul M dan U, V submodul dari M. Submodul V disebut suplemen radikal dari U di M jika U + V = M dan $U \cap V \leq Rad(V)$. Jika setiap submodul dari M memiliki suplemen radikal di M maka M disebut modul tersuplemen radikal.

Jelas setiap suplemen merupakan suplemen radikal. Selanjutnya perhatikan bahwa $Rad(V) \leq Rad(M)$. Akibatnya dapat didefisinikan submodul suplemen radikal lemah sebagai berikut.

Definisi 25. (Wang, 2006) Diberikan R −modul M dan U, V submodul dari M. Submodul V dikatakan suplemen radikal lemah dari U di M jika U + V = M dan $U \cap V \leq Rad(M)$. Modul M dikatakan modul tersuplemen radikal lemah jika setiap submodul dari M memiliki suplemen radikal lemah.

Perhatikan bahwa setiap submodul suplemen merupakan suplemen radikal lemah, dari Teorema 22 diperoleh modul semi sederhana merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Berikut diberikan beberapa sifat yang ada pada modul tersuplemen radikal lemah.

Lemma 26. Diberikan R −modul M. Jika V merupakan suplemen radikal lemah dari U di

M maka $(V+L)/L$ merupakan suplemen radikal lemah dari U/L di M/L untuk suatu L submodul dari U.

Teorema 27. (Wang, 2006) Diberikan modul tersuplemen radikal lemah M, maka,

1. Setiap submodul suplemen dari M merupakan modul tersuplemen radikal lemah.
2. Jika $f : N \to M$ merupakan epimorfisma kecil maka N juga modul tersuplemen radikal lemah.
3. Setiap modul faktor dari M merupakan modul tersuplemen radikal lemah.

Bukti :

1. Ambil sebarang N submodul suplemen dari M. Ambil sebarang $K \leq M$ dengan $K \leq N \leq M$. Diketahui M modul tersuplemen radikal lemah maka terdapat $L \leq M$ sehingga $K + L = M$ dan $K \cap L \leq Rad(M)$ Perhatikan $N = N \cap M = N \cap (K + L)$. Dengan Teorema 5 diperoleh $N = K + (N \cap L)$. Karena $K \cap L \leq Rad(M)$ maka $N \cap (K \cap L) \leq N \cap Rad(M)$. Dari Lemma 3.19 diperoleh $K \cap (N \cap L) \leq Rad(N)$. Jadi untuk setiap $K \leq N$ terdapat $N \cap L \leq N$ sehingga $K + (N \cap L) = N$ dan $K \cap (N \cap L) \leq Rad(N)$. Terbukti N modul tersuplemen radikal lemah.

2.Diberikan epimorfisma kecil $f : N \to M$. Ambil sebarang $L \leq N$, diperoleh $f(L) \leq M$. Karena M modul tersuplemen radikal lemah maka terdapat $K \leq M$ sehingga $f(L) + K = M$ dan $f(L) \cap K \leq Rad(M)$. Karena f epimorfisma maka $f(N) = M$ akibatnya
$$f^{-1}(f(N)) = f^{-1}(M)$$
$$= f^{-1}(f(L) + K)$$
$$N = L + ker(f) + f^{-1}(K).$$
Karena $ker(f) \ll N$ diperoleh
$$N = L + f^{-1}(K).$$
Perhatikan
$$L \cap f^{-1}(K) \leq f^{-1}(f(L) \cap K)$$
$$\leq f^{-1}(Rad(M))$$
Dari Lemma 13 diperoleh $f^{-1}(Rad(M)) = f^{-1}(f(Rad(N)) = Ker(f) + Rad(N) = Rad(N)$. Jadi terbukti $L \cap f^{-1}(K) \leq Rad(N)$. Terbukti N modul tersuplemen radikal lemah.

3. Ambil sebarang $L \leq U \leq M$. Diketahui M modul tersuplemen radikal lemah maka terdapat $V \leq M$ suplemen radikal lemah dari U. Dari Lemma 26 diperoleh $(V+L)/L$ suplemen radikal lemah dari U/L di M/L. Karena untuk setiap U/L terdapat $(V+L)/L$ suplemen radikal lemah dari U/L di M/L maka M/L modul tersuplemen radikal lemah. Terbukti setiap modul faktor dari M merupakan modul tersuplemen radikal lemah.

Akibat 28. Setiap bayangan homomorfis dari modul tersuplemen radikal lemah juga merupakan modul tersuplemen radikal lemah.

Lemma 29. (Wang, 2006) Diberikan $K, M_1 \leq M$ dan M_1 merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Jika M_1 + K memiliki suplemen radikal lemah di M maka K juga memiliki suplemen radikal lemah di M.

Teorema 30. (Wang, 2006) Diberikan M_1 dan M_2 adalah modul tersuplemen radikal lemah. Jika $M = M_1 + M_2$ maka M adalah modul tersuplemen radikal lemah.

Bukti : Ambil sebarang $N \leq M$. Diperoleh $M = M_1 + M_2 + N$. Perhatikan bahwa $M = M_1 + M_2 + N + \{0\}$ dan $(M_1 + M_2 + N) \cap \{0\} = \{0\}$. Akibatnya $(M_1 + M_2 + N) \cap \{0\} \leq Rad(M)$. Jadi $\{0\}$ adalah suplemen radikal lemah dari $M_1 + M_2 + N$ di M. Diketahui M_1 adalah modul tersuplemen radikal lemah, dari Lemma 29 diperoleh $M_2 + N$ memiliki suplemen radikal lemah di M. Karena M_2 adalah modul tersuplemen radikal lemah, dari Lemma 29 maka N memiliki suplemen radikal lemah di M. Jadi Untuk sebarang $N \leq M$ memiliki suplemen radikal lemah di M artinya M merupakan modul tersuplemen radikal lemah.

Akibat 31. Setiap penjumlahan berhingga dari modul tersuplemen radikal lemah merupakan modul tersuplemen radikal lemah.

Selanjutnya diberikan sifat yang berhubungan dengan barisan eksak. Terlebih dahulu diberikan sebuah lemma yang dipakai untuk membuktikan sifat tersebut.

Lemma 32. (Nisanci, 2009) Diberikan $R-$modul M dan $N \leq M$. Jika $N \leq Rad(M)$ dan $M/_{N}$ merupakan modul tersuplemen radikal lemah maka M juga merupakan modul tersuplemen radikal lemah.

Teorema 33. (Nisanci, 2009) Diberikan $0 \to L \to M \to N \to 0$ barisan eksak pendek dari modul L, M dan N. Jika L dan N merupakan modul tersuplemen radikal lemah dan L memiliki suplemen radikal lemah di M maka M merupakan modul tersuplemen radikal lemah.

Bukti : Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $L \leq M$. Diberikan S suplemen radikal lemah dari L di M, sehingga $S+L = M$ dan $S \cap L \leq Rad(M)$. Perhatikan

$$M/_{(S \cap L)} = {(S+L)}/_{(S \cap L)}$$

$$= S/_{(S \cap L)} + L/_{(S \cap L)}$$

Diketahui L modul tersuplemen radikal lemah. Dari Teorema 21.1 menjamin $L/_{(S \cap L)}$ merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Dari teorema utama homorfisma modul diperoleh

$$M/_{L} = {(S+\mathrm{L})}/_{\mathrm{L}} \cong S/_{(S \cap L)}$$

Karena barisan eksak maka diperoleh $M/_{L} \cong N$ Mengingat bahwa N modul tersuplemen radikal lemah maka $S/_{(S \cap L)}$ juga modul tersuplemen radikal lemah. Akibat Teorema 30 diperoleh $M/_{(S \cap L)}$ modul tersuplemen radikal lemah. Karena N modul tersuplemen radikal lemah maka $S/_{(S \cap L)}$ modul tersuplemen radikal lemah. Dari Teorema 30 diperoleh $M/_{(S \cap L)}$ modul tersuplemen radikal lemah. Karena $S \cap L \leq Rad(M)$, dari Lemma 32 diperoleh M modul tersuplemen radikal lemah.

Selanjutnya dengan memanfaatkan Lemma 15, dapat diperoleh sifat sebagai berikut.

Teorema 34. (Wang, 2006) Modul M merupakan modul tersuplemen radikal lemah jika dan hanya maka M merupakan modul semilokal.

Bukti :

($\Leftarrow$) Mengikuti Lemma 15 (a) $\Longrightarrow$(b)

($\Longrightarrow$) Mengikuti Lemma 15 (b) $\Longrightarrow$(a).

Modul Tersuplemen Radikal Lemah Lengkap

Pada bagian sebelumnya telah dijelaskan tentang modul tersuplemen radikal lemah. Tentu tidak terdapat submodul dalam setiap modul M bersifat modul tersuplemen radikal lemah. Dari fakta tersebut dapat didefinisikan modul tersuplemen radikal lemah lengkap sebagai berikut.

Definisi 35. (Nisanci, 2009) Diberikan $R-$ modul M. Modul M dikatakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap jika setiap submodul dari M merupakan modul tersuplemen radikal lemah.

Jelas bahwa setiap modul tersuplemen radikal lemah lengkap merupakan modul tersuplemen radikal lemah, tetapi secara umum tidak berlaku sebaliknya. Berikut ini diberikan contoh yang menunjukkan hal tersebut.

Contoh 36. Modul $\mathbb{Q}$ atas $\mathbb{Z}$ merupakan modul tersuplemen radikal lemah, tetapi $\mathbb{Z}$ sebagai submodul dari $\mathbb{Q}$ bukan merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Jadi

$\mathbb{Z}-$modul $\mathbb{Q}$ bukan merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Modul semi sederhana merupakan salah satu contoh dari modul tersuplemen radikal lemah lengkap. Lemma berikut menjamin hal tersebut.

Lemma 37. Jika $R-$modul M semi sederhana maka M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Bukti : Ambil sebarang $N \leq M$. Mengingat M modul semi sederhana maka dari Teorema 3.3 diperoleh N modul semi sederhana. Mengingat setiap modul semi sederhana merupakan modul tersuplemen radikal lemah maka N modul tersuplemen radikal lemah. Terbukti M modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Jadi, modul semi sederhana merupakan salah satu contoh modul yang merupakan modul tersuplemen radikal lemah sekaligus modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Teorema 38. (Nisanci, 2009) Untuk sebarang ring R, pernyataan-pernyataan berikut ekivalen:

a) Ring R adalah semilokal..
b) Setiap $R-$modul adalah modul tersuplemen radikal lemah..
c) Setiap $R-$modul adalah modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Bukti : (a) $\Longrightarrow$(b) Diketahui R semilokal. Dari Lemma 16 dan Teorema 34 diperoleh setiap $R-$modul modul tersuplemen radikal lemah.

(b)$\Longrightarrow$(a) Diketahui setiap $R-$modul merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Dari Teorema 34 dan Lemma 16 diperoleh R semilokal.

(b)$\Longrightarrow$ (c) Diberikan sebarang $R-$modul M. Mengingat submodul dari M juga $R-$modul maka dari diketahui diperoleh setiap submodul dari M adalah modul tersuplemen lemah. Jadi M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

(c) $\Longrightarrow$(b) Terbukti dari definisi modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Berikut diberikan beberapa sifat yang dimiliki oleh modul tersuplemen radikal lemah lengkap. Pada Teorema 27 telah ditunjukkan bahwa setiap modul faktor dari modul tersuplemen radikal lemah juga merupakan modul tersuplemen radi- kal lemah. Sifat ini juga berlaku pada modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Teorema 39. (Nisanci, 2009) Diberikan $R-$modul M. Jika M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap maka setiap modul faktor dari M juga merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Bukti : Ambil sebarang $U \leq \mathrm{K} \leq \mathrm{M}$. Diketahui M modul tersuplemen radikal lemah lengkap maka K merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Akibatnya terdapat $V \leq K$ suplemen radikal lemah dari U di $K, U+V=K$ dan $U \cap K \leq Rad(K)$. Perhatikan bahwa untuk sebarang $L \leq U$ diperoleh $\mathrm{K}/\mathrm{L} = (U+V)/L = \mathrm{U}/\mathrm{L} + (V+L)/L$. Dari Lemma 32 diperoleh $(V+L)/L$ adalah suplemen radikal lemah dari U/L di K/L. Akibatnya K/L merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Terbukti M/L merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Akibat 40. (Nisanci, 2009) Setiap bayangan homomorfis dari modul tersuplemen radikal lemah lengkap juga merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Bukti : Diberikan M modul tersuplemen radikal lemah lengkap. Karena setiap bayangan homomorfik dari M isomorfis ke modul faktor dari M, maka oleh Teorema 39 terbukti setiap bayangan homomorfis dari M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Teorema 41. (Nisanci, 2009) Diberikan M sebagai jumlahan langsung dari submodul M_1 dan M_2 dengan M_2 merupakan semi sederhana, $M = M_1 \oplus M_2$. Modul M merupakan modul tersuplemen radikal lengkap jika dan hanya jika M_1 juga modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Bukti : ($\Longrightarrow$) Diberikan $M = M_1 \oplus M_2$., akibatnya $M_1 \cong {}^{\mathrm{M}}/_{\mathrm{M}_2}$. Diketahui M modul tersuplemen radikal lemah lengkap maka dari Teorema 39 diperoleh M_1 juga modul tersuplemen radikal lemah lengkap.
($\Longleftarrow$) Diberikan $M = M_1 \oplus M_2$ dengan M_2 modul semi sederhana dan M_1 modul tersuplemen radikal lemah lengkap. Ambil sebarang $N \leq M$, akibatnya untuk $N \cap \mathrm{M}_2 < \mathrm{M}_2$ terdapat $L \leq \mathrm{M}_2$ sedemikian sehingga $\mathrm{M}_2 = (N \cap \mathrm{M}_2) \oplus L = (N \oplus L) \cap \mathrm{M}_2$. Perhatikan bahwa

$$M = M_1 \oplus \mathrm{M}_2 = M_1 \oplus L \oplus (N \cap \mathrm{M}_2)$$

dan

$$\mathrm{N} = \mathrm{N} \cap \mathrm{M} = \mathrm{N} \cap (M_1 \oplus L \oplus (N \cap \mathrm{M}_2)).$$

Karena $(N \cap \mathrm{M}_2) \leq N$ maka dengan Teorema 5 diperoleh

$$N = (N \cap (M_1 \oplus L)) \oplus (N \cap \mathrm{M}_2).$$

Misalkan $H = N \cap (M_1 \oplus L)$. Jelas bahwa $H \leq M_1 \oplus L$. Perhatikan bahwa

$$H \cap L = (N \cap (M_1 \oplus L)) \cap L = N \cap L = \{0\}.$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$(H \cap \mathrm{M}_2) = N \cap (M_1 \oplus L) \cap \mathrm{M}_2 = N \cap L = \{0\},$$

dan pemetaan $\pi_1 : M \to M_1$ diperoleh $ker(\pi_1) = M_2$ sehingga $\pi_1|H : H \to M_1$ merupakan monomorfisma. Akibatnya H menempel pada M_1 . Karena M_1 modul tersuplemen radikal lemah lengkap maka H merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Kemudian karena M_2 semi sederhana maka dari Lemma 3 diperoleh $N \cap \mathrm{M}_2$ semi sederhana. Karena setiap modul semi sederhana merupakan modul tersuplemen radikal lemah maka $N \cap \mathrm{M}_2$ merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Akhirnya dengan menggunakan Teorema 30 diperoleh bahwa N modul tersuplemen radikal lemah, akibatnya M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Telah diketahui bahwa setiap modul semi sederhana merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap maka memberikan dugaan bahwa jumlahan langsung dari dua modul tersuplemen radikal lemah lengkap merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Definisi 42. (Adkins, 1992) Diberikan R −modul M. Annihilator dari M adalah $ann(M) = \{r \in R | rm = 0, \forall m \in M\}$.

Lemma 43. Diberikan M jumlahan langsung dari submodul M_1 dan M_2, $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$. Jika $R = ann(M_1) + ann(M_2)$ maka $N = (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$ untuk setiap $N \leq M$.

Bukti : Ambil sebarang $N \leq M$ dan $m \in N$ akibatnya $m = m_1 + m_2$ dengan $m_1 \in M_1$ dan $m_2 \in M_2$. Karena $R = ann(M_1) + ann(M_2)$ maka terdapat $r, s \in R$ sedemikian sehingga $rm_1 = 0, sm_2 = 0$ dan $1 = r + s$. Perhatikan bahwa $sm = s(m_1 + m_2) = sm_1 + sm_2 = sm1$.
Karena $sm \in N$ dan $sm \in M_1$ maka $sm \in (N \cap M_1)$ dan $rm = r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2 = rm_2$. Karena $rm \in N$ dan $rm \in M_2$ maka $rm \in (N \cap M_2)$. Dari sini diperoleh

$$\begin{aligned}(r+s)m &= (r+s)(m_1 + m_2)\\ &= rm_1 + rm_2 + sm_1 + sm_2\\ &= rm_2 + sm_1.\end{aligned}$$

Akibatnya $(r + s)m \in ((N \cap M_1) + (N \cap M_2))$. Karena $r + s = 1$ maka $m \in (N \cap M_1) + (N \cap M_2)$. Diketahui $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ maka $(N \cap M_1) \cap (N \cap M_2) = \{0\}$. Terbukti $N \subseteq (N \cap M_1) + (N \cap M_2)$. Sebaliknya ambil sebarang $y = y_1 + y_2 \in (N \cap M_1) \oplus (N \cap M_1)$ dengan
$y_1 \in (N \cap M_1)$ akibatnya $y_1 \in N$ dan $y_1 \in M_1$ dan
$y_2 \in (N \cap M_2)$ akibatnya $y_2 \in N$ dan $y_2 \in M_2$
Jadi $y = y_1 + y_2 \in N$. Terbukti $(N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2) \subseteq N$ .Jadi N = $(N \cap M_1) \oplus (N \cap M_2)$.

Teorema 44.. Diberikan M jumlahan langsung dari modul tersuplemen radikal lemah lengkap M_1 dan M_2, $M = M_1 \oplus M_2$. Jika $R = ann(M_1) + ann(M_2)$ maka M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

***Bukti* :** Ambil sebarang $U \leq M$. Dari Lemma 44 diperoleh $U = (U \cap M_1) \oplus (U \cap M_2)$. Mengingat M_1 dan M_2

modul tersuplemen radikal lemah lengkap maka $U \cap$ dan $U \cap M_2$ merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Dari Akibat 32 diperoleh U modul tersuplemen radikal lemah. Jadi, M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Pada teorema selanjutnya dapat diketahui bahwa jumlahan langsung berhingga dari submodul- submodul tersuplemen radikal lemah lengkap juga merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Lemma 45. (Smith, 2000) Diberikan M jumlahan langsung berhingga dari submodul $M_i (1 \leq i \leq n)$ untuk $n \leq 2$, $M = M_1 \oplus \cdots \oplus Mn$. Jika $R = ann(M_i) + ann(M_j)$ untuk setiap $1 \leq i < j \leq n$ maka

$$N = (N \cap M_1) \oplus \cdots \oplus (N \cap M_n)$$

untuk setiap submodul N dari M.

Teorema 46. (Nisanci, 2009) Jika $M = M_1 \oplus \cdots \oplus Mn$, jumlahan langsung berhingga dari modul tersuplemen radikal lemah lengkap M_i untuk $1 \leq i \leq n, n \geq 2$ dan $R = ann(M_i + ann(M_j)$ untuk setiap$1 \leq i < j \leq n$ maka M modul tersu plemen radikal lemah lengkap.

Bukti : Ambil sebarang $U \leq M$. Dari Lemma 45 diperoleh $U = (U \cap M_1) \oplus \cdots \oplus (U \cap M_n)$. Karena M_i modul tersuplemen radikal lemah lengkap maka $U \cap M_i$ merupakan modul tersuplemen radikal lemah. Dari Akibat 31 diperoleh U modul tersuplemen radikal lemah. Jadi, M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Karena modul faktor dari modul tersuplemen radikal lemah lengkap juga merupakan modul tersuplemen radikal lengkap (Teorema 39), maka sifat pada barisan eksak pendek seperti pada Teorema 32 juga berlaku. Teorema berikut menjamin sifat tersebut.

Teorema 47. (Nisanci, 2009) Diberikan R −modul M dan U, N submdodul dari M. Jika pada barisan eksak pendek $0 \to U \to M \to N \to 0$ dengan U, N modul tersuplemen radikal lemah lengkap dan untuk setiap $Y \leq U$ memiliki suplemen radikal lemah di setiap $X \leq M$ dengan $Y \leq X \leq M$ maka M juga modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Bukti : Diketahui setiap submodul $Y \leq U$ memiliki suplemen radikal lemah disetiap submodul $X \leq M$ yang memuat Y. Ambil sebarang $K \leq M$ akibatnya ada dua kemungkinan yaitu K submodul dari U dan K bukan submodul dari U. Andaikan K submodul dari U maka diperoleh K memiliki suplemen radikal lemah, akibatnya M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap. Selanjutnya andaikan K bukan sub-modul dari U. Diketahui barisan eksak pen-dek maka $N = {M}/{U}$. Karena N modul tersuplemen radikal lemah maka ${M}/{U}$ modul tersuplemen radikal lemah lengkap. Perhatikan bahwa ${(K+U)}/{U}$ merupakan submodul dari ${M}/{U}$. Dari teorema utama homomorfisma modul diperoleh ${(K+U)}/{U} \cong {K}/{(K \cap U)}$. Selanjutnya bentuk barisan eksak pendek

$$0 \to (K \cap U) \to \mathrm{K} \to {K}/{(K \cap U)} \to 0$$

Perhatikan bahwa $K \cap U \leq U$ akibatnya $K \cap U$ merupakan modul tersuplemen radikal lemah dan $K \cap U$ memiliki suplemen radikal lemah di K. Karena ${M}/{U}$ merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap maka ${(K+U)}/{U}$ merupakan modul tersuplemen radikal lemah akibatnya ${K}/{(K \cap U)}$ juga modul tersuplemen radikal lemah. Dari Teorema 33 diperoleh K modul tersuplemen radikal lemah. Jadi terbukti M modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Telah diketahui bahwa modul semi sederhana merupakan salah satu contoh modul yang merupakan modul tersuplemen, modul tersuplemen radikal, modul tersuplemen radikal lemah dan modul tersuplemen radikal lemah. Oleh karena itu, dapat ditentukan salah satu syarat agar modul-modul tersebut saling ekivalen.

Teorema 48. Diberikan R −modul M. Jika $Rad(M) = \{0\}$ maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen

a. Modul M merupakan modul tersuplemen.
b. Modul M merupakan modul tersuplemen radikal.
c. Modul M merupakan modul tersuplemen radikal lemah.
d. Modul M merupakan modul tersuplemen radikal lemah lengkap.

Kesimpulan dan Saran

Dari pembahasan diatas dapat dilihat bahwa modul faktor, bayangan homomorfis dan jumlahan langsung berhingga dari modul tersuplemen radikal lemah lengkap merupakan modul tersuple- men radikal lemah lengkap. Kemudian dari tiga modul tersuplemen radikal lemah lengkap dapat dibentuk barisan eksak pendek. Sifat-sifat tersebut juga merupakan sifat modul tersuplemen radikal dan modul tersuplemen radikal lemah. Definisikan modul tersuplemen radikal lengkap sebagai modul yang setiap submodulnya merupakan modul tersuplemen radikal. Penelitian lanjutan dapat dilakukan untuk melihat apakah sifat-sifat tersebut berlaku pada modul tersuple-men radikal lengkap.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adkins, William A. dan Weintraub, Steven H., 1992, *ALGEBRA: An Approach via Module Theory,* Springer-Verlag, New York.

[2] Anderson, F. W. dan Fuller, K.R., 1992, *Rings and Categories of Modules*, Springer, New York.

[3] Clark, J., Lomp, C.,Vanaja, N. dan Wis-bauer, R., 2006, *Lifting Modules*, Birkhauser Verlag, Basel Switzerland.

[4] Lomp, C., 1999, On Semilocal Modules and Rings, *Comm. Algebra*, Vol.27, hal.1921- 1935.

[5] MENEMEN, F., 2005, Cofinitely Amply Weakly Supplemented Modules, *M.Sc. Thesis,* Izmir Institute of Technology, Turkey.

[6] Nisanci, B., Turkmen, E. dan Pancar, A. 2009, Completely Weak Rad-supplemented Modules, *International Journal of Computational Cognition*, Vol.7, No.2 hal.48-50.

[7] Smith, P. F., 2000, Finitely Generated Supplemented Modules are Amply Supplemented, *Arab. J. Sci. Eng. Sect. C Theme Issues.* Vol. 25, No. 2, pp. 69-79.

[8] TOP, S., 2007, Totally Weak Supplemented Modules, *M.Sc. Thesis*, Izmir Institute of Technology, Turkey.

[9] Wang, Y. dan Ding, N., 2006, Generali-zed supplemented modules, *Taiwanese Journal of Mathematics*, Vol.10, No.6 December 2006, hal. 1589-1601.

[10] Wisbauer, R., 1991, *Foundations of Module and Ring Theory,* Gordon and Breach.