KARISMATIKA—ISSN : 2443-0366
TAHUN 1 VOL. 1 NO. 2 AGUSTUS 2015

ALTERNATIF MENURUNKAN RUMUS PANJANG GARIS BERAT PADA SUATU SEGITIGA

Riza Gushelsi[1*], Mashadi[2], Sri Gemawati[2]

[1]Mahasiswa Program Studi Magister Matematika
[2]Dosen JurusanMatematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau
Kampus Binawidya, Pekanbaru 28293

*gushelsiriza@gmail.com

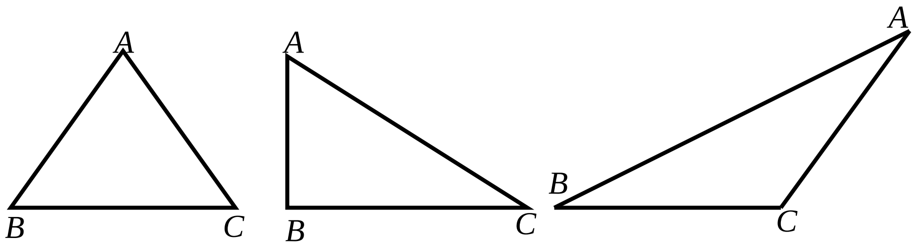
Abstrak

Di dalam beberapa buku teks untuk menurunkan rumus panjang garis berat pada suatu segitiga pada umumnya menggunakan teorema Stewart. Dalam tulisan ini diberikan alternative lain untuk menurunkan rumus panjang garis berat pada suatu segitiga dengan menggunakan konsep kesebangunan dan luas daerah.

Kata kunci: garis berat, teorema Stewart, kesebangunan

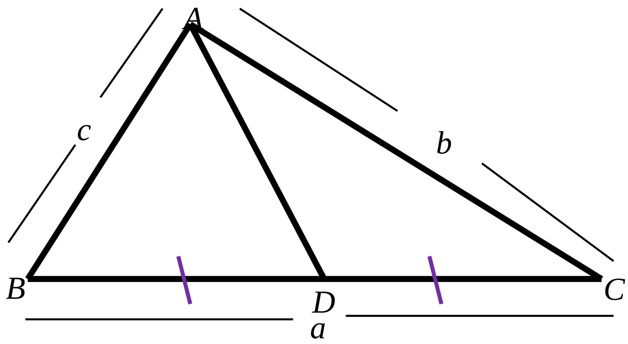
Pendahuluan

Segitiga merupakan suatu bangun datar yang mempunyai tiga buah sisi dan tiga buah sudut [1, 9, 10],seperti pada Gambar 1.



Gambar 1: Bentuk $\Delta\ ABC$

Garis berat merupakan salah satu garis istimewa pada suatu segitiga.Misalkan terdapat segitiga sembarang, apabila ditarik suatu garis lurus dari salah satu titik sudut segi tiga ke sisi di hadapan sudut itu maka akan membagi sisi tersebut menjad idua bagian yang sama panjang. Garis ini disebut dengan garis berat [1,7, 9,10].



Gambar 2: ΔABC Sembarang Dengan Garis Berat AD

Perhatikan $\Delta\, ABC$ pada Gambar 2. Panjang garis berat AD dari $\Delta\, ABC$ sembarang pada Gambar 2 adalah,

$$AD^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2 \text{ atau}$$

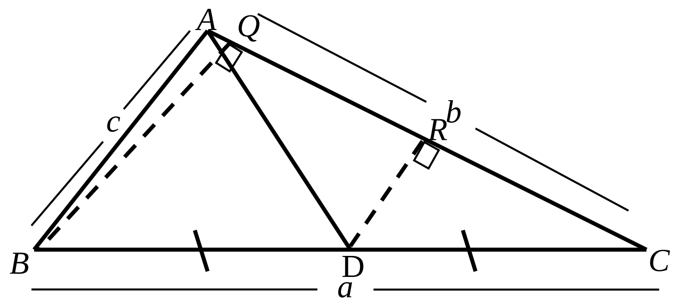
$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2$$

Dalam bukuteks [7, 8, 9] telah dibahas cara menurunkan rumus panjang garis berat pada suatu segitiga. Cara yang digunakan adalah dengan menggunakan teorema Stewart[7, 8, 9].Pada artikel ini dibahas alternative lain untuk menurunkan rumus panjang garis berat pada suatu segiti gaya itu dengan menggunakan konsep kesebangunan dan luas daerah.

Alternatif Pertama Konsep Kesebangunan

1) Kasus Segitiga Lancip

Perhatikan $\Delta\, ABC$ pada Gambar 3, suatu garis ditarik dari titik sudut B tegak lurus ke sisi AC, sebut sebagai titik Q dan ditarik lagi garis dar ititik sudut D tegak lurus ke sisi AC, sebut sebagai titik R.



Gambar 3:$\Delta\, ABC$ setelah dikonstruksi garis DR dan $BQ \perp AC$

Perhatikan $\Delta\, CRD$ dan $\Delta\, CQB$ pada Gambar 3, $\angle CRD = \angle CQB$ dan $\angle DCR = \angle BCQ$. Berdasarkan Akibat Teorema Kesebangunan [9, 11, 13] dapat ditunjukkan bahwa Δ *CRD*~Δ *CQB*, sehingga diperoleh

$$\frac{CR}{CQ} = \frac{CD}{BC},$$

$$2CR = CQ.$$

Selanjutnya perhatikan Δ *CRD* dan Δ *ARD* pada Gambar 3, berdasarkan Teorema Pythagoras [6, 7, 8, 9] diperoleh

$$DR^2 = CD^2 - CR^2. \qquad (2)$$

$$DR^2 = AD^2 - AR^2. \qquad (1)$$

Kemudian dari persamaan (2) dan (3) diperoleh

$$CD^2 - CR^2 = AD^2 - AR^2,$$
$$CD^2 = AD^2 - AR^2 + CR^2,$$
$$= AD^2 - (AC - CR)^2 + CR^2,$$
$$= AD^2 - AC^2 + 2(AC)(CR) - CR^2 + CR^2,$$
$$CD^2 = AD^2 - AC^2 + 2(AC)(CR),$$
$$CR = \frac{CD^2 - AD^2 + AC^2}{2AC}. \qquad (4)$$

Perhatikan Δ *CQB* dan Δ *AQB* pada Gambar 3, berdasarkan Teorema Pythagoras [6, 7, 8, 9] juga diperoleh

$$BQ^2 = BC^2 - CQ^2. \qquad (5)$$
$$BQ^2 = AB^2 - AQ^2. \qquad (6)$$

Dari persamaan (5) dan (6) diperoleh

$$BC^2 - CQ^2 = AB^2 - AQ^2,$$
$$BC^2 = AB^2 - AQ^2 + CQ^2,$$
$$= AB^2 - (AC - CQ)^2 + CQ^2,$$
$$= AB^2 - AC^2 + 2(AC)(CQ) - CQ^2 + CQ^2,$$
$$BC^2 = AB^2 - AC^2 + 2(AC)(CQ),$$
$$2(AC)(CQ) = BC^2 - AB^2 + AC^2,$$
$$CQ = \frac{BC^2 - AB^2 + AC^2}{2AC}. \qquad (7)$$

Kemudian apabila persamaan (4) dan (7) disubstitusikan ke persamaan (1) maka diperoleh

$$2\left(\frac{CD^2 - AD^2 + AC^2}{2AC}\right) = \left(\frac{BC^2 - AB^2 + AC^2}{2AC}\right),$$
$$2CD^2 - 2AD^2 + 2AC^2 = BC^2 - AB^2 + AC^2,$$

$$2AD^2 = 2CD^2 + 2AC^2 - BC^2 + AB^2 - AC^2,$$
$$AD^2 = CD^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2.$$

Selanjutnya perhatikan Gambar 3 diketahui bahwa $CD = \frac{1}{2}BC$ sehingga diperoleh

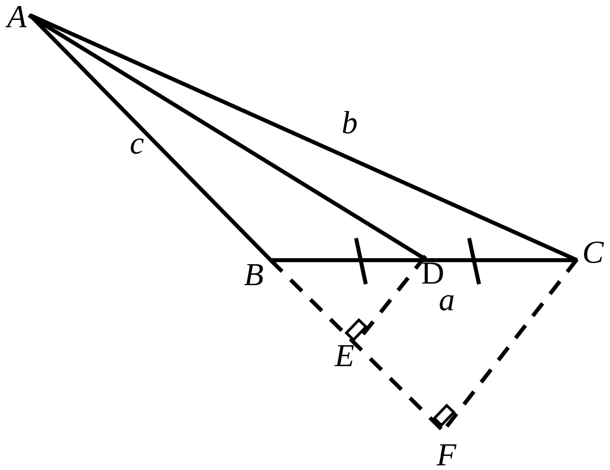
$$AD^2 = \left(\frac{1}{2}BC\right)^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}AC^2,$$
$$= \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}BC^2,$$
$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

Jadi, dengan menggunakan konsep kesebangunan pada kasus segitiga lancip diperoleh bahwa rumus panjang garis berat Δ *AB C*pada Gambar 3 adalah

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

2) Kasus Segitiga Tumpul

Perhatikan Δ *ABC* pada Gambar 4, suatu garis ditarik dari titik sudut *D* tegak lurus perpanjangan sisi *AB* , sebut sebagai titik *E*. Kemudian ditarik lagi garis dari titik sudu *C* tegak lurus perpanjangan sisi *AB* sebut sebagai titik *F*.



Gambar 4 : ΔABC setelah dikonstruksi garis *DE* dan *CF* $\perp$ *AB*

Selanjutnya perhatikan Δ *CFB* dan Δ *DEB* pada Gambar 4, $\angle CFB = \angle DEB$ dan $\angle DBE = \angle CBF$. Berdasarkan Akibat Teorema Kesebangunan [9, 11, 13] dapat ditunjukkan bahwa Δ *CFB*~Δ *DEB*, sehingga diperoleh

$$\frac{BE}{BF}=\frac{BD}{BC},$$
$$2BE=BF.$$

Perhatikan Δ *AFC* dan Δ *BFC* pada Gambar 4, berdasarkan Teorema [6, 7, 8, 9] diperoleh

$$CF^2=BC^2-BF^2. \quad (9)$$
$$CF^2=AC^2-AF^2. \quad (10)$$

Dari persamaan (9) dan (10) diperoleh

$$BC^2-BF^2=AC^2-AF^2,$$
$$BC^2=AC^2-AF^2+BF^2,$$
$$=AC^2-(AB^2+BF)^2+BF^2,$$
$$=AC^2-AB^2-2(AB)(BF)-BF^2+BF^2,$$

$$BC^2=AC^2-AB^2-2(AB)(BF),$$
$$2(AB)(BF)=AC^2-AB^2-BC^2,$$
$$BF=\frac{AC^2-AB^2-BC^2}{2AB}. \quad (11)$$

Perhatikan Δ *AED* dan Δ *BED* pada Gambar 4, berdasarkan Teorema [6, 7, 8, 9] juga diperoleh

$$DE^2=BD^2-BE^2, \quad (12)$$
$$DE^2=AD^2-AE^2, \quad (13)$$

Kemudian dari persamaan (12) dan (13) diperoleh

$$BD^2-BE^2=AD^2-AE^2,$$
$$BD^2=AD^2-AE^2+BE^2,$$
$$=AD^2-(AB+BE)^2+BE^2,$$
$$=AD^2-AB^2-2(AB)(BE)-BE^2+BE^2,$$

$$BD^2=AD^2-AB^2-2(AB)(BE),$$
$$2(AB)(BE)=AD^2-AB^2-BD^2,$$
$$BE=\frac{AD^2-BD^2-AB^2}{2AB}. \quad (14)$$

Apabila persamaan (11) dan (14) disubstitusikan ke persamaan (8) maka diperoleh

$$2\left(\frac{AD^2-BD^2-AB^2}{2AB}\right)=\left(\frac{AC^2-BC^2-AB^2}{2AB}\right),$$
$$2AD^2-2BD^2-2AB^2=AC^2-BC^2-AB^2,$$
$$2AD^2=2BD^2+2AB^2+AC^2-BC^2-AB^2,$$
$$AD^2=BD^2+AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{2}BC^2-\frac{1}{2}AB^2.$$

Selanjutnya perhatikan Gambar 4 juga diketahui bahwa diketahui bahwa $BD=\frac{1}{2}BC$ sehingga diperoleh

$$AD^2=\left(\frac{1}{2}BC\right)^2+AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{2}BC^2-\frac{1}{2}AB^2,$$
$$=\frac{1}{2}AC^2+\frac{1}{2}AB^2-\frac{1}{4}BC^2,$$
$$AD^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2.$$

Jadi, dengan menggunakan konsep kesebangunan pada kasus segitiga tumpul juga diperoleh bahwa rumus panjang garis berat Δ *ABC* pada Gambar 4 adalah

$$AD^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2.$$

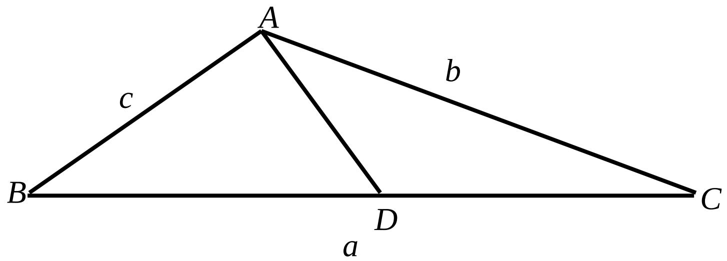
Alternatif Kedua Konsep Luas Daerah

Selain menggunakan konsep kesebangunan rumus panjang garis berat pada suatu segitiga juga dapat diturunkan dengan menggunakan formula Heron [4, 5, 9, 12].

Perhatikan $\Delta\ ABC$ pada Gambar 5. Misalkan $\Delta\ ABC$ dengan sisi *a*, *b*, dan *c* sehingga luas segitiga berdasarkan formula Heron [4, 5, 9, 12] adalah

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

dengan $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Gambar 5: Luas $\Delta\ ABD$ = Luas $\Delta\ ADC$

Jadi, luas $\Delta\ ABC$ pada Gambar 5 adalah

$$\mathrm{L} = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left[\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\right]},$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)},$$

$$\mathrm{L} = \frac{1}{4}\sqrt{-\left(a^4+b^4+c^4\right)+2\left[a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right]}. \qquad (15)$$

Perhatikan $\Delta\ ABD$ pada Gambar 5.Berdasarkan formula Heron [4, 5, 9, 12] dan persamaan (15) diperoleh

$$\mathrm{L}\Delta ABD = \frac{1}{4}\sqrt{-\left(a^4+b^4+c^4\right)+2\left[a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right]},$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{-\left[\left(\frac{a}{2}\right)^4 + AD^4 + c^4\right] + 2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 AD^2 + AD^2c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 c^2\right]}. \qquad (16)$$

Selanjutnya perhatikan $\Delta\ ADC$ pada Gambar 5.Berdasarkan formula Heron [4, 5, 9, 12] dan persamaan (15) juga diperoleh bahwa

$$\mathrm{L}\Delta ADC = \frac{1}{4}\sqrt{-\left(a^4+b^4+c^4\right)+2\left[a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2\right]},$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{-\left[\left(\frac{a}{2}\right)^4+b^4+AD^4\right]+2\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 b^2+b^2+AD^2\left(\frac{a}{2}\right)^2 AD^2\right]}. \qquad (17)$$

Berdasarkan Teorema Luas Segitiga [9] dapat ditunjukkan bahwa
LΔABD = LΔADC,

$$(\mathrm{L}\Delta ABD)^2=(\mathrm{L}\Delta ADC)^2. \qquad (18)$$

Apabila persamaan (16) dan (17) disubstitusikan kepersamaan (18) maka diperoleh

$$-c^4+2\left(AD^2\right)\left(c^2\right)+2\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(c^2\right)=-b^4+2\left(AD^2\right)\left(b^2\right)+2\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(b^2\right),$$

$$b^4-c^4+2\left(AD^2\right)\left(c^2\right)-2\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(b^2\right)+2\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(c^2\right)-2\left(AD^2\right)\left(b^2\right)=0,$$

$$\left(b^2+c^2\right)\left(b^2-c^2\right)-2\left(AD^2\right)\left(b^2-c^2\right)-2\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(b^2-c^2\right)=0,$$

$$\left(b^2+c^2\right)-2AD^2-2\left(\frac{a}{2}\right)^2=0,$$

$$2AD^2=\left(b^2+c^2\right)-2\left[\frac{a}{2}\right]^2,$$

$$AD^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2.$$

Jadi, dengan menggunakan formula Heron diperoleh bahwa rumus panjang garis berat Δ *ABC* pada Gambar 5 adalah

$$AD^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2.$$

Kesimpulan

Dari hasi lartikel ini menunjukkan bahwa persoalan matematika seperti Geometri dapat diselesaikan dengan rumus yang sederhana. Untuk menurunkan rumus panjang garis berat pada suatu segitiga, cukup diselesaikan dengan konsep kesebangunan dan luas daerah yang sudah dipelajari siswa di tingkat sekolah menengah

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adinawan, M.C. 2013. *Matematika SMP Jilid 1B Kelas VII Berdasarkan Kurikulum 2013*.Erlangga.Jakarta.

[2] Amarasunghe, G.W.I.S. 2012. On The Standart Lengths of Angle Bisectors and the Angle Bisector Theorem.*Global Journal of Advanced research on Classical and Modern Geometries*. 1: 15-27.

[3] Buchholz, R.H and Rathbun, R.L. 1997. An Infinite Set of Heron Triangles With Two Rational Medians. *American Mathematical Monthly*.104: 107-115.

[4] Corral, M. 2009. *Trigonometry*. GNU Free DocumentationLicense. Michigan.

[5] Gantert, A. X. 2008. *Geometry*.Amsco School Publications. USA.

[6] Jhon, C.S. 2000. *The Pythagorean Theorem Crown Jewel of Mathematics*, Sparrow-Hawke. USA.

[7] Kisacanin, B. 2002. *Mathematical Problems and Proofs: Combinatorics, Number Theory, and Geometry*.Kluwer Academic Publishers. USA.

[8] Lang, S. 1988. *Geometry Second Edition*.Springer. USA.

[9] Mashadi. 2012. *Buku Ajar Geometri.* PUSBANGDIK UNRI. Pekanbaru.

[10] Nuharini, D. 2008. *Matematika Konsep dan Aplikasinya untuk SMP/MTs Kelas VII*. Depdiknas. Jakarta.

[11] Nuniek, A.A. 2008. *Mudah Belajar Matematika*. Depdiknas. Jakarta.

[12] Purnomo, D. 013. *Trigonometri*. IKIP BUDI UTOMO MALANG. Malang.

[13] Rich, B and Thomas, C. 2008. *Geometry Includes Plane, Analytic and Transformasi Geometry*. Schaum's Outlines Series. New York.