PEMBELAJARAN SISTEM TRANSFORMASI MÖBIUS $(\mathcal{M},\circ)$ SEBAGAI SARANA MENYAMPAIKAN KONSEP GRUP

Guntur Maulana Muhammad[*] Dan Iden Rainal Ihsan[**]
[*]Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Suryakancana
[**]Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Islam Nusantara
Surel : guntur@unsur.ac.id
irainalihsan@uninus.ac.id

ABSTRAK

Transformasi Möbius dengan bentuk umum $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dengan $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ dan $\Delta = ad - bc \neq 0$ membentuk suatu grup terhadap operasi komposisi. Pembelajaran mengenai grup transformasi Möbius $(\mathcal{M},\circ)$ dapat dijadikan sarana melakukan proses abstraksi dan generalisasi dalam kuliah struktur aljabar khususnya pada pembelajaran grup. Dalam desain pembelajarannya terdapat ruang untuk mahasiswa dalam memeriksa suatu sistem termasuk grup atau tidak. Pembelajaran dapat pula memberika ruang bagi mahasiswa untuk memahami konsep homomorfisma dan isomorfisma suatu grup. Dalam pembelajaran ini mahasiswa diarahkan untuk memahami bahwa grup $PSL_2(\mathbb{C})$ isomorfis dengan grup $(\mathcal{M},\circ)$ yang dapat membri ruang bagi mahasiswa untuk memahami isomorfisma grup.

Kata Kunci: Grup, Transformasi Möbius, Grup $PSL_2(\mathbb{C})$

PENDAHULUAN

Dalam mempelajari konsep-konsep aljabar yang abstrak, diperlukan kesempatan untuk melakukan proses abstraksi, generalisasi, dan analogi. Termasuk dalam kuliah struktur aljabar mengenai grup, mahasiswa harus memiliki ruang atau kesempatan melakukan proses abstraksi, generalisasi, dan analogi.

Dalam menyampaikan konsep-konsep abstrak yang fundamental dalam aljabar seorang pendidik, dalam hal ini dosen, harus dapat membangun pemahaman peserta didik, dalam hal ini mahasiswa. Dalam menyampaikan konsep grup yang abstrak, dibutuhkan jembatan atau perantara agar mahassiswa dapat memahaminya. Pembelajaran harus dapat didesain sedemikian rupa sehingga mahasiswa dapat memahami konsep abstrak pada materi grup. Desain pembelajaran yang diaplikasikan tentu harus memberi ruang kepada mahasiswa untuk melakukan proses abstraksi, generalisasi, dan analogi.

Perantara yang dapat digunakan salah satunya adalah pembelajaran sistem transformasi Möbius $(\mathcal{M},\circ)$. Sistem tersebut merupaka suatu grup yang dapat dipelajari strukturnya untuk kemudian dijadikan sebagai perantara bagi mahasiswa untuk memahami konsep grup. Sistem ini dapat memberikan gambaran bagi mahasiswa dalam mempelajari grup. Pada pembelajaran sistem transformasi Möbius $(\mathcal{M},\circ)$, mahasiswa dapat mengamati dua grup sekaligus, yakni grup

p-ISSN: 2355 - 1739
e-ISSN: 2407 - 6295

transformasi Möbius $(\mathcal{M},\circ)$ dan grup matriks bilangan kompleks 2×2 atau $GL_2(\mathbb{C})$. Dalam pembelajaran sistem transformasi Möbius $(\mathcal{M},\circ)$ mahasiswa difasilitasi untuk memahami konsep transformasi, matriks, dan bilangan kompleks. Pada artikel ini akan dikaji konsep grup apa saja yang dapat disampaikan melalui pembelajaran sistem transformasi Möbius $(\mathcal{M},\circ)$.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Transformasi Möbius

Transformasi Möbius dikenal pula dengan istilah *homographic transformations*, *linear fractional transformations*, atau *bilinear transformations*. Sebagai penghormatan dan dedikasi kepada yang pertama kali menggali materi ini, yaitu Auguste Ferdinand Möbius (seorang geometer Jerman) (Deaux, 2008: 127), dinamakanlah transformasi Möbius yang didefinisikan sebagai berikut

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, \Delta = ad - bc \neq 0$$

Terdapat sifat penting mengenai ketidak-tunggalan dari koefisien transformasi Möbius. Misalkan terdapat transformasi Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, yang disebut koefisien dalam hal ini adalah $a, b, c,$ dan d. Apabila terdapat $k \in \mathbb{C}$ yang tidak sama dengan nol, maka

$$\frac{az+b}{cz+d} = f(z) = \frac{kaz+kb}{kcz+kd}$$

Dengan sifat ketidak tunggalan ini, transformasi Möbius dan inversnya dapat direpresentasikan secara tidak unik. Dengan kata lain perkalian skalar dengan koefisien-koefisien transformasi Möbius sama sekali tidak merubah transformasinya (Ihsan, 2015)

Grup Transformasi Möbius

Berdasarkan definisi, transformasi Möbius dapat dikatakan sebagai himpunan tak hampa. Hal tersebut dikarenakan kita dapat membentuk transformasi Möbius dengan memilih $a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$. Kemudian pada transformasi Möbius berlaku juga operasi komposisi fungsi. Dengan demikian transformasi Möbius dengan operasi komposisi fungsi membentuk sistem matematika, misalkan kita simbolkan $(\mathcal{M},\circ)$.

Kita dapat memeriksa apakah operasi komposisi pada himpunan transformasi Möbius terdefinisi dengan baik atau tidak. Misalkan $m_1(z)$ dan $m_2(z)$ merupakan transformasi Möbius dengan $m_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ dan $m_1(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$. sedemikian Sehingga $(m_1 \circ m_2)(z) = \frac{a_1(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2})+b_1}{c_1(\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2})+d_1} = \frac{(a_1a_2+b_1c_2)z+a_1b_2+b_1d_2}{(c_1a_2+d_1c_2)z+c_1b_2+d_1d_2}$.

Kita dapat memeriksa bentuk tersebut merupakan transformasi Möbius atau bukan. Dapat kita lihat dari bentuk terakhir $\Delta = (a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (c_1a_2 + d_1c_2)(a_1b_2 + b_1d_2)$. Proses

p-ISSN: 2355 - 1739
e-ISSN: 2407 - 6295

aljabar dapat kita lanjutkan sedemikian hingga kita mendapatkan bentuk seperti berikut

$$\begin{aligned}\Delta = a_1d_1(a_2d_2 - b_2c_2) \\ - b_1c_1(a_2d_2 - b_2c_2) \\ = (a_1d_1 \\ - b_1c_1)(a_2d_2 \\ - b_2c_2)\end{aligned}$$

Dari pemisalan awal diketahui bahwa $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$ dan $a_2d_2 - b_2d_2 \neq 0$. Dengan demikian karena $\Delta \neq 0$, maka $m_1 \circ m_2$merupakan transformasi Möbius. Hal ini menunjukkan bahwa koleksi transformasi Möbius tertutup terhadap operasi komposisi.

Langkah selanjutnya akan diperiksa apakah semua sifat pada definisi grup berlaku atau tidak pada transformasi Möbius. Untuk memeriksa sifat assosiatif terlebih dahulu kita misalkan transformasi Möbius $m_1, m_2; m_3$. Misalkan $m_1 = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$, $m_2 = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$, dan $m_3 = \frac{a_3z+b_3}{c_3z+d_3}$. Dengan proses aljabar kita dapat menunjukkan $m_1 \circ (m_2 \circ m_3) = (m_1 \circ m_2) \circ m_3$. Sehingga transformasi Möbius terhadap operasi komposisi memenuhi sifat assosiatif.

Transformasi atau fungsi identitas $e(z) = z$ dapat dikatakan sebagai suatu transformasi Möbius. Hal tersebut dikarenakan $e(z) = z$ memenuhi syarat transformasi Möbius, yakni nilai $\Delta \neq 0$. Sehingga dalam himpunan transformasi terdapat suatu unsur identitas e, sedemikian sehingga $e \circ m = m = m \circ e, \forall m \in \mathcal{M}$. Sehingga dalam sistem transformasi Möbius terhadap operasi komposisi, terdapat unsur identitas.

Pemeriksaan dilanjutkan dengan melihat ada atau tidaknya pada $(\mathcal{M},\circ)$ invers untuk setiap anggotanya. Untuk setiap $m(z)$ transformasi Möbius, kita dapat mencari inversnya $(m^{-1}(z))$. Invers dari $m(z)$ adalah

$$m^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}.$$

Diketahui $\Delta = (-d)(-a) - bc = da - bc \neq 0$, sehingga $m^{-1}(z)$ juga merupakan transformasi Möbius. Dengan terpenuhinya sifat assosiatif, kemudian terdapatnya unsur identitas dan untuk setiap anggota terdapat inversnya, maka $(\mathcal{M},\circ)$ merupakan grup terhadap operasi komposisi.

Terdapat suatu koneksi atau hubungan antara koleksi transformasi Möbius dengan koleksi matriks bilangan kompleks berorde 2×2 yang memiliki invers (invertible). Misalkan $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ dengan $m_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ dan $m_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$, terdapat matriks bilangan kompleks berorde 2×2, misalkan M_1 dan M_2 yang berturut-turut dapat dikaitkan dengan $m_1(z)$ dan $m_2(z)$. Misalkan M_1 dan M_2 disajikan sebagai berikut $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$, dan $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ dengan $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$ dan $a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0$

Sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya $(m_1 \circ m_2)(z) \in \mathcal{M}$, begitu juga dengan $M1 \times M2$ merupakan anggota dari grup matriks

p-ISSN: 2355 - 1739
e-ISSN: 2407 - 6295

bilangan kompleks yang berorde 2×2 dengan determinan berbeda dengan 0, atau disebut $GL_2(C)$. Penyelidikan lebih lanjut dengan melihat hubungan antara $M_1 \times M_2$ dengan $m_1 \circ m_2$. Sebagaimana diketahui, hasil $M_1 \times M_2$ adalah sebagai berikut

$$M_1 \times M_2 = \begin{bmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{bmatrix}.$$

Matriks tersebut adalah matriks yang menyatakan koefisien dari transformasi $(m_1 \circ m_2)(z)$. Dengan demikian terdapat hubungan atau pengaitan dari grup $GL_2(\mathbb{C})$ ke $\mathcal{M}$.

Pengaitan dari $GL_2(\mathbb{C})$ ke $\mathcal{M}$ terdapat juga ketika membahas unsur identitas dan invers. Sebagaimana telah dibahas, unsur identitas pada $\mathcal{M}$ adalah pemetaan identitas yaitu $e(z) = z$. Berikut ini adalah matriks yang dapat dikaitkan dengan pemetaan identitas

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

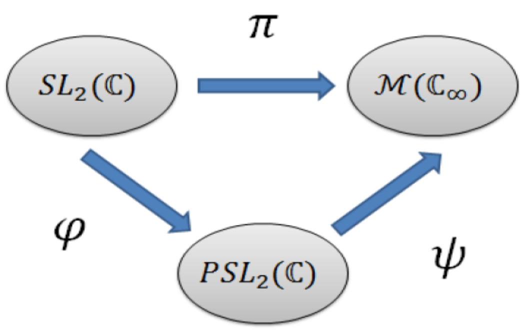
Matriks tersebut adalah matriks identitas di grup $GL_2(\mathbb{C})$. Kemudian apabila kita membahas invers, matriks $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ sebagai invers dari matriks M_1 dapat dikaitkan dengan invers dari m_1. Pengaitan tersebut dapat dilakukan berdasarkan ketidak tunggalan dari koefisien transformasi Möbius.

Misalkan $ad - bc = k$, maka kita dapat mengalikan setiap koefisien dari $m_1^{-1}(z)$ dengan $-\frac{1}{k}$ sedemikian sehingga $m_1^{-1}(z) = \frac{\frac{d}{k}z + \frac{-b}{k}}{\frac{-c}{k}z + \frac{a}{k}}$. Dengan demikian terlihat jelas bahwa M^{-1} dapat dikaitkan dengan m^{-1}.

Dari penjelasan yang telah dipaparkan, dapat dikatakan terdapat suatu pengaitan dari grup $GL_2(\mathbb{C})$ terhadap grup ke $\mathcal{M}$. Misalkan pengaitan tersebut adalah $\delta : GL_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}$ Pengaitan δ tersebut merupakan suatu homomorfisma grup.

Pengaitan berdasarkan struktur aljabar dapat dikaji lebih lanjut. Terdapat pengaitan grup $\mathcal{M}$ dengan grup matriks bilangan kompleks 2×2 dengan determinan sama dengan 1 yaitu $SL_2(\mathbb{C})$. Terdapat pula kaitan antara grup $\mathcal{M}$ dengan grup kuosien dari grup $SL_2(\mathbb{C})$ yaitu $SL_2(\mathbb{C})/\pm I$ atau grup yang diberi nama $PSL_2(\mathbb{C})$. Berdasarkan teorema isomorfisma grup, dapat dikatakan grup $PSL_2(\mathbb{C})$ isomorfis dengan grup $\mathcal{M}$. Hal tersebut berdampak $\forall m \in \mathcal{M}$ dapat dikaitkan dan disajikan dengan bentuk $\pm M$ dengan $M \in PSL_2(\mathbb{C})$. Dengan penyajian dalam bentuk matriks, nilai trace dapat digunakan dalam mengklasifikasikan penyajian geometris dari transformasi Möbius. Hubungan pengaitan-pengaitan tersebut dapat disajikan dalam bentuk gambar sebagai berikut

p-ISSN: 2355 - 1739
e-ISSN: 2407 - 6295



Gambar 1. Hubungan $SL_2(\mathbb{C})$, $PSL_2(\mathbb{C})$, dan $\mathcal{M}$
Sumber : Ihsan (2015)

Relevansi Pembelajaran Sistem Transformasi Möbius terhadap Penyampaian Konsep Grup

Melalui pembelajaran sistem transformasi Möbius, mahasiswa memiliki ruang untuk mempelajari konsep grup. Diawali dari memeriksa suatu operasi koposisi terdefinisi dengan baik atau tidak pada himpunan transformasi Möbius ($\mathcal{M}$). Pada proses tersebut mahasiswa dapat diarahkan untuk memahami pengertian dari sifat tertutup suatu operasi.

Pembelajaran dapat dilanjutkan pada proses pemeriksaan struktur sistem transformasi Möbius $(\mathcal{M},\circ)$. Mahasiswa diarahkan untuk dapat menunjukkan bahwa $(\mathcal{M},\circ)$ merupakan suatu grup. Mahasiswa dapat diarahkan untuk memahami konsep sifat assosiatif pada operasasi komposisi. Mahasiswa diarahkan pula untuk dapat menunjukkan adanya unsur identitas, yaitu transformasi identitas $e(z) = z, \forall z \in \mathbb{C}$. Kemudian mahasiswa diarahkan untuk dapat menunjukkan dan meyakinkan bahwa setiap unsur di $\mathcal{M}$ memiliki invers terhadap operasi komposisi. Mahasiswa diharapkan dapat beragumen dengan valid mengenai kepastian setiap unsur memiliki invers.

Pembelajaran dilanjutkan pada proses yang sama, namun pada himpunan dan sistem yang berbeda. Pembelajaran dapat dilanjutkan pada pembahasan grup matriks bilangan kompleks berorde 2×2 yang memiliki invers yang disebut $GL_2(\mathbb{C})$. Pembelajaran berlanjut pada pembahasan grup matriks bilangan kompleks 2×2 yang memiliki determinan sama dengan 1 yakni $SL_2(\mathbb{C})$

Pada pembelajaran dapat diperkenalkan pula contoh grup kuosien, yakni $SL_2(\mathbb{C})/\pm$ atau grup yang diberi nama $PSL_2(\mathbb{C})$. Setelah proses tersebut, mahasiswa dapat diarahkan untuk mengetahui hubungan $(\mathcal{M},\circ)$, $GL_2(\mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C})$, dan $PSL_2(\mathbb{C})$. Dengan proses tersebut, terdapat ruang bagi mahasiswa untuk memahami isomorfisma grup.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan terdapat beberapa konsep grup yang dapat disampaikan melalui pembelajaran mengenai sistem transformasi Möbius $(\mathcal{M},\circ)$. Mahasiswa dapat diarahkan untuk memahami sifat ketertutupan dari suatu operasi. Mahasiswa dapat pula diarahkan untuk menunjukan suatu sistem termasuk grup atau bukan. Dengan pengaitan dengan $GL_2(\mathbb{C})$, $SL_2(\mathbb{C})$, dan $PSL_2(\mathbb{C})$ mahasiswa

p-ISSN: 2355 - 1739
e-ISSN: 2407 - 6295

dapat diarahkan untuk memahami konsep grup kuosien. Kemudian dengan pengaitan tersebut pula, mahasiswa dapat diarahkan untuk memahami konsep isomorfis.

Dengan proses ini mahasiswa memiliki ruang untuk mengembangkan pemahamannya untuk memahami konsep abstrak. Pembelajaran mengenai sistem transformasi Möbius $(\mathcal{M},\circ)$ dipandang cocok, karena selain dapat menjadi sarana menyampaikan konsep abstrak, pembelajaran membantu mahasiswa berpikir lebih general, tidak terpaku pada sistem bilangan saja. Mahasiswa diberi ruang untuk mempelajari grup selain dari sistem bilangan.

Sebagai bahan lanjutan, dapat dilakukan penelitian-penelitian dan kajian-kajian yang dapat memperkaya pembahasan ini. Dapat diteliti ada atau tidaknya pengaruh pembelajaran sistem transformasi Möbius terhadap pemahaman mahasiswa mengenai konsep grup. Kemudian dapat dikaji pula secara lebih lanjut mengenai sistem transformasi Möbius agar dapat menjembatani penyampaian konsep grup yang lebih lanjut seperti kelas konjugasi dan lain sebagainya.

DAFTAR RUJUKAN

Arifin, Ahmad 2000. *Aljabar*. Bandung: Penerbit ITB.

Anderson, James W. 2005. *Hyperbolic Geometry*, London: Springer-Verlag.

Budhi, Wono S. 2003. *Langkah Awal Menuju ke Olimpiade Matematika*. Jakarta: C.V. Ricardo.

Deaux, Roland. 2008. *Introduction to The Geometry of Complex Numbers*. New York: Dover Publications Inc.

Ihsan, Iden R. 2015. *Klasifikasi Geometris dari Transformasi Möbius*. Tesis. Institut Teknologi Bandung. Tidak diterbitkan.

Jones, Gareth A & Singerman, David. 1987. *Complex Function : An Algebraic and Geometric Viewpoint*. Cambridge: Cambridge University.

Needham, Tristan. 1997. *Visual Complex Analysis*. Oxford: Oxford University Press.

Olsen, John. 2010. *The Geometry of Möbius Transformations*. Rochester: University of Rochester.

Schwerdtfeger, Hans. 1980. *Complex Numbers: Circle Geometry, Mobius Transformation, Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover Publication Inc.

Tall, David (Ed) 2002, *Advance Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publisher.

Yaglom, I. M. 1968. *Complex Numbers in Geometry*. London: Academic Press.

p-ISSN: 2355 - 1739
e-ISSN: 2407 - 6295