

**PREVENSI PENYEBARAN VIRUS H5N1 DENGAN MODEL SI-SIIR
MELALUI KONTROL VAKSINASI
PADA POPULASI MANUSIA**

Tri Andri Hutapea

Jurusan Matematika FMIPA Unimed. Email: triandh_A19@yahoo.com

ABSTRAK

Pemodelan matematika merupakan salah satu cara untuk menginterpretasikan masalah nyata dalam kajian matematik. Penyebaran virus H5N1 dari populasi unggas ke populasi manusia diinvestigatasi melalui model yang terbentuk. Pada penelitian ini, salah satu tipe dari pemodelan matematika, yaitu SI-SIIR, digunakan untuk menganalisis stabilitas lokal dinamik untuk populasi unggas dan manusia. Model SI-SIIR mendeskripsikan pengelompokan setiap individu untuk kedua populasi. Setiap unggas yang terinfeksi virus H5N1 akan mati, tetapi setiap manusia terinfeksi mungkin meninggal atau sembuh. Selain itu, manusia juga dapat terinfeksi mutasi virus H5N1. Pembahasan utama pada penelitian ini adalah analisis stabilitas lokal penyebaran virus H5N1 dengan kontrol vaksinasi pada populasi manusia.

Kata kunci: *Model SI-SIIR; virus H5N1; mutasi virus H5N1; Endemik; Stabilitas Lokal; and Vaksinasi.*

1. PENDAHULUAN

Flu burung merupakan istilah yang sering digunakan untuk menggambarkan HPAI (High Pathogenic Avian Influenza) H5N1 yang menyerang pada hewan-hewan ternak khususnya ayam dan bebek. Pada tahun 1901 diketahui penyebab

virus H5N1 adalah sejenis virus yang merupakan suatu agen *filterable*. Pada unggas HPAI dapat menyerang secara mendadak, hingga dalam jangka waktu singkat menimbulkan kematian. Pada tahun 1997 muncul kasus pertama di

Hongkong manusia terinfeksi virus H5N1 satu orang dilaporkan meninggal karena virus tersebut. Setelah itu, tercatat ada 100 lebih kasus yang menimpa manusia dengan 60 diantaranya berakibat fatal sejak. Seluruh kasus tersebut terjadi di Asia disebabkan kontak langsung dengan unggas yang terinfeksi [6] dan [7].

Virus H5N1 menular ke manusia jika ada interaksi langsung dengan unggas yang terinfeksi virus H5N1. Unggas yang terinfeksi dapat pula mengeluarkan virus ini melalui tinja, yang kemudian mengering dan hancur menjadi semacam bubuk. Menurut WHO, virus H5N1 lebih mudah menular dari unggas ke manusia dibandingkan dari manusia ke manusia. Satu-satunya cara virus H5N1 dapat menyebar dengan mudah dari manusia ke manusia adalah jika virus H5N1 tersebut bermutasi dan bercampur dengan virus flu manusia [11]. Di Indonesia, pada akhir tahun 2004 sekitar 5 juta ternak ayam dimusnahkan karena diindikasikan terserang virus H5N1. Selanjutnya Juli tahun 2005 dilaporkan kematian

manusia akibat virus H5N1 menyebabkan tiga orang meninggal.

Dalam kajian pemodelan matematika, model SI-SIIR atau pengembangannya merupakan model penyebaran penyakit endemik yang telah diteliti (Iwami, 2008; Derouich and Boutayeb, 2008). Kompartemen SI, yaitu *susceptible*: kelompok individu unggas yang rentan, dan *infected*: kelompok individu unggas yang tertular virus H5N1, merupakan kelompok populasi sumber virus. Dalam tulisan, kompartemen SI merupakan populasi unggas, yaitu asal virus H5N1 selanjutnya akan menyebar ke populasi manusia. Kompartemen SIIR, yaitu *susceptible*: kelompok individu manusia yang rentan, *Infected_A*: kelompok individu manusia yang terinfeksi karena virus H5N1, *Infected_M*: kelompok individu manusia yang terinfeksi karena mutasi/perubahan virus H5N1, dan *Recovery*: kelompok individu manusia yang sembuh [11] dan [14]. Sejak adanya endemik virus H5N1, para ahli sudah merancang vaksin untuk meminimalisir kematian manusia dan unggas. Menurut WHO,

pada Desember 2014, beberapa pusat penelitian bahkan universitas di dunia ini sudah berhasil menemukan vaksin untuk virus flu burung, baik vaksin untuk manusia atau vaksin untuk unggas.

Pada penelitian ini, penulis hanya menginvestigasi penyebaran virus H5N1 dengan model SI-SIIR dengan kontrol vaksinasi pada populasi manusia. Adanya vaksin untuk manusia merupakan daya tarik untuk melakukan kajian kontrol secara matematik dalam penyebaran virus H5N1. Hal ini merupakan motivasi utama dalam penelitian ini. Model SI-SIIR adalah salah satu model

2. METODE PENELITIAN

Populasi unggas dikelompokkan dalam dua kompartemen, yaitu kompartemen unggas yang rentan (S_1) dan kompartemen unggas yang terinfeksi virus H5N1 (I_1). Oleh karena itu, model penyebaran virus H5N1 yang digunakan pada populasi unggas adalah model SI. Sementara itu populasi manusia dikelompokkan dalam empat kompartemen yaitu kompartemen manusia yang rentan (S_2), kompartemen manusia yang

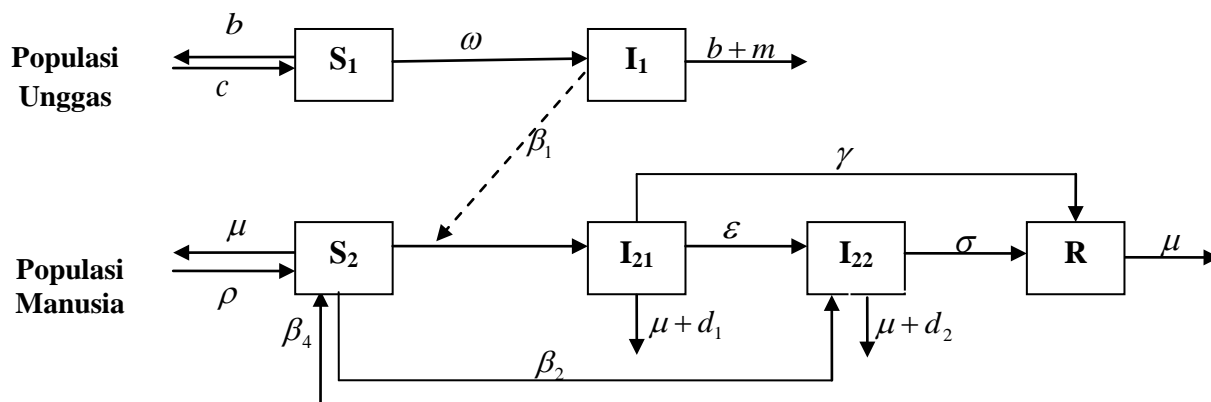
penyebaran penyakit endemik, SI merupakan pengelompokan pada populasi unggas dalam 2 kompartemen yaitu unggas yang rentan (S_1) dan unggas yang terinfeksi virus H5N1 (I_1). SIIR adalah pengelompokan pada populasi manusia dalam 4 kompartemen yaitu manusia yang rentan (S_2), manusia yang terinfeksi oleh virus H5N1 (I_{21}), manusia yang terinfeksi oleh mutasi virus H5N1 (I_{22}) dan manusia yang sembuh (R), dengan catatan bahwa manusia yang sembuh merupakan manusia yang sembuh total dari virus H5N1.

terinfeksi oleh virus H5N1 (I_{21}), kompartemen manusia yang terinfeksi oleh mutasi virus H5N1 (I_{22}) dan kompartemen manusia yang sembuh (R). Kajian pada penelitian ini, manusia yang telah sembuh dari virus H5N1 adalah sembuh permanen, maka pemodelan yang digunakan adalah model SIIR.

Ide dalam penelitian ini merupakan pengembangan dari peneliti terdahulu yang telah konsern dengan

kajian seputar virus H5N1. Dengan mengacu pada [8], [10], [11], [12], dan [16] bagan ilustrasi penyebaran

virus H5N1 dengan kontrol vaksinasi pada populasi manusia adalah sebagai berikut.



Gambar 1: Ilustrasi kerangka model dengan kontrol vaksin pada populasi manusia.

c : rekrutmen total pada populasi unggas, b : laju kematian alami pada populasi unggas; ω : laju kontak individu unggas yang rentan dengan individu unggas yang terinfeksi pada populasi unggas; m : laju kematian karena virus H5N1 pada populasi unggas; β_1 : laju kontak individu yang terinfeksi pada populasi unggas dengan individu yang rentan pada populasi manusia; ρ : rekrutmen total pada populasi manusia; μ : laju kematian alami pada populasi manusia; d_1 : laju kematian pada populasi manusia karena virus

utama; d_2 : laju kematian pada populasi manusia karena mutasi virus H5N1; β_2 : laju penularan mutasi virus H5N1 pada populasi manusia, β_3 : laju vaksinasi pada populasi unggas; ε : laju mutasi, γ : Laju kesembuhan individu dari populasi manusia yang terinfeksi virus H5N1; σ : laju kesembuhan individu populasi manusia yang terinfeksi mutasi virus H5N1; α : Laju penurunan immunitas individu populasi manusia; dan β_4 : laju vaksinasi pada populasi manusia.

3. TEORI PENDUKUNG

3.1 Persamaan Diferensial

Bentuk umum suatu sistem N persamaan orde pertama akan mempunyai bentuk berikut:

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_N), \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_N), \\ &\vdots \\ y'_N &= f_N(x, y_1, y_2, \dots, y_N). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Jika di dalam suatu sistem terdapat perkalian antara variabel bebasnya maka disebut sistem persamaan diferensial tak linier. Jika di dalam suatu sistem tidak terdapat perkalian antara variabel bebasnya maka disebut sistem persamaan diferensial linier [5].

3.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 1

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x didalam R^n dinamakan **vektor eigen** (eigen vektor) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yakni:

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ

dinamakan **nilai eigen** (eigen value) dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ [1].

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks A yang berukuran $n \times n$, dapat dilakukan dengan cara menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai

$$Ax = \lambda Ix \tag{3.1}$$

atau secara ekuivalen,

$$(\lambda I - A)x = 0. \tag{3.2}$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan ini. Persamaan (3.2) memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{3.3}$$

ini disebut **persamaan karakteristik** A ; skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A [15].

3.3 Matriks Jacobian

Matriks jacobian akan mempermudah dalam proses linearisasi sistem non linear [20].

Definisi 2

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem persamaan diferensial nonlinier $\frac{dx}{dt} = f(x)$ dengan

$f_i \in C'(E, \mathbb{R}), i = 1, 2, \dots, n.$

Matriks

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

dinamakan matriks Jacobian dari f pada titik x .

3.4 Titik Keseimbangan

Diberikan sistem autonomus sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \right\} \tag{3.5}$$

Suatu titik (x_0, y_0) merupakan suatu titik kritis (atau titik keseimbangan) dari sistem (3.5) jika $f(x_0, y_0) = 0$ dan $g(x_0, y_0) = 0$. fungsi konstan $x(t) = x_0, y(t) = y_0$, merupakan penyelesaian dari (3.5) untuk semua t [9].

Definisi 3

Dalam bukunya [22], Perko mendefinisikan suatu sistem

$$\dot{x} = f(x) \tag{3.6}$$

Dengan $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fungsi kontinu pada E . Sistem (3.6) dikatakan linier jika $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ masing-masing linier dalam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ dan dikatakan nonlinear jika $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ masing-masing nonlinier dalam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Definisi 4

Titik $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium Sistem (3.6) jika $f(\hat{x}) = 0$.

Definisi 5

Titik ekuilibrium \hat{x} disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari Sistem (3.6) jika semua nilai eigen $Jf(\hat{x})$, mempunyai bagian real tak nol.

Definisi 6

Diberikan matriks Jacobian $Jf(\hat{x})$, sistem $\dot{x} = Jf(\hat{x})x$ disebut linierisasi

Sistem (3.6) di sekitar titik \hat{x} . Kestabilan suatu sistem linierisasi diperoleh berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian $Jf(\hat{x})$.

Teorema 3.1

Diberikan $\dot{x} = Ax$, dengan $A_{n \times n}$

matriks bilangan real, mempunyai nilai eigen $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, k (k \leq n)$.

a) Titik ekuilibrium \hat{x} dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $\text{Re}(\lambda_i) < 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$.

b) Jika terdapat $i \in (1, 2, \dots, k)$ sehingga $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, maka titik ekuilibrium \hat{x} tidak stabil.

c) Jika (i) $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$.

(ii) Nilai-nilai eigen λ_i dengan $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ bersesuaian dengan vektor eigen bebas linier yang cacahnya sama dengan multiplisitasnya dari λ_i .

4. ANALISIS MODEL DAN HASIL

Ide dalam penelitian ini merupakan pengembangan dari peneliti terdahulu yang telah koncern dengan kajian seputar virus H5N1. Asumsi-asumsi dalam penelitian ini sebagai berikut:

- Populasi manusia dan burung terbuka
- Setiap kelahiran pada populasi manusia masuk ke kompartemen

maka titik ekuilibrium \hat{x} stabil.

3.5 Bilangan Reproduksi Dasar

Parameter R_0 (Bilangan Reproduksi Dasar) yaitu perkiraan jumlah kasus kedua yang dihasilkan oleh satu *infectious* yang masuk ke populasi. Jika $R_0 < 1$ maka $\frac{dI}{dt} < 0$ untuk $t \rightarrow \infty$, maka setiap individu *infected* hanya dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata kurang dari satu penderita baru, sehingga penyakit akan menghilang dari populasi. Jika $R_0 > 1$ maka setiap individu *infected* dapat menyebarkan penyakit kepada rata-rata lebih dari satu penderita baru, sehingga pada akhirnya akan terjadi epidemik [18].

rentan.

- Setiap kelahiran pada populasi burung masuk ke kompartemen rentan.
- Tidak terjadi penularan virus H5N1 antar manusia.
- Laju penurunan immunitas individu (manusia) yang sembuh = 0.
- Masa inkubasi pada individu

yang terinfeksi atau mutasi virus H5N1 diabaikan. Dengan tersebut dan melalui bagan ilustrasi penyebaran virus H5N1

dengan kontrol vaksinasi pada populasi manusia (Gambar 1), model matematika dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= c + bS_1 - \omega S_1 I_1 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \omega S_1 I_1 - bI_1 - mI_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= c - bS_1 - \omega S_1 I_1 \\ \frac{dI_1}{dt} &= \omega S_1 I_1 - bI_1 - mI_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= \rho - \mu S_2 - \beta_1 S_2 I_1 - \beta_2 S_2 I_{22} + \beta_4 S_2 \\ \frac{dI_{21}}{dt} &= \beta_1 S_2 I_1 - \varepsilon I_{21} I_{22} - \mu I_{21} - d_1 I_{21} - \gamma I_{21} \\ \frac{dI_{22}}{dt} &= \varepsilon I_{21} I_{22} + \beta_2 S_2 I_{22} - \mu I_{22} - d_2 I_{22} - \sigma I_{22} \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I_{21} + \sigma I_{22} - \mu R \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Dengan domain

$$T = \left\{ \left(\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) \in R_+^6 \mid 0 \leq \hat{S}_1 + \hat{I}_1 \leq \hat{N}_1 \leq \frac{c}{b}, 0 \leq \hat{S}_2 + \hat{I}_{21} + \hat{I}_{22} + \hat{R} \leq \hat{N}_2 \leq \frac{\rho}{\mu} \right\}.$$

Teorema 4.1

Diberikan $r_0 = \frac{c\omega}{b(b+m)}$ bilangan reproduktif dasar dari Sistem (4.1).

i) Jika $r_0 \leq 1$ maka Sistem (4.1) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu

$$P_0 = \left(\hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left(\frac{c}{b}, 0 \right).$$

ii) Jika $r_0 > 1$, maka Sistem (4.1) mempunyai dua titik ekuilibrium

$$P_0 = \left(\hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left(\frac{c}{b}, 0 \right) \text{ dan } P_1 = \left(\hat{S}_1, \hat{I}_1 \right) = \left(\frac{b+m}{\omega}, \frac{c}{b+m} - \frac{b}{\omega} \right).$$

Teorema 4.2

Misalkan $\hat{I}_1 = 0$ dan $R_0 = \frac{\rho\beta_2}{(\mu - \beta_4)(\mu + d_2 + \sigma)}$ bilangan reproduktif dasar

karena penyebaran mutasi virus H5N1 pada populasi manusia.

i) Jika $R_0 \leq 1$, maka Sistem (5.2) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium yaitu E_0

$$= \left(\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\rho}{\mu}, 0, 0, 0 \right). \text{ Jika } R_0 > 1, \text{ maka Sistem (5.2)}$$

mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu $E_0 =$

$$\left(\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\rho}{\mu}, 0, 0, 0 \right) \text{ dan}$$

$$E_1 = \left(\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right)$$

$$= \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{(\mu + d_2 + \sigma)}{\beta_2}, 0, \left(\frac{\rho}{(\mu + d_2 + \sigma)} - \frac{\mu - \beta_4}{\beta_2} \right), \frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{\rho}{(\mu + d_2 + \sigma)} - \frac{\mu - \beta_4}{\beta_2} \right) \right).$$

Bukti:

Untuk $\hat{I}_1 = 0$ dan $\frac{dI_{21}}{dt} = 0$ diperoleh $\hat{I}_{21} = 0$. Jika $\hat{I}_1 = 0$ dan $\frac{dI_{22}}{dt} = 0$ maka

$\hat{I}_{22} = 0$ atau $\hat{S}_2 = \frac{\mu + d_2 + \sigma}{\beta_2}$, demikian selanjutnya hingga titik ekuilibrium non-

endemik $E_0 = \left(\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R} \right) = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\rho}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$. Karena

$$\hat{I}_{22} = \frac{\rho}{(\mu + d_2 + \sigma)} - \frac{\mu - \beta_4}{\beta_2}, \quad \hat{I}_{21} = 0, \quad \text{dan} \quad \frac{dR}{dt} = 0, \quad \text{ditemukan}$$

$$\hat{R} = \frac{\sigma}{\mu} \left[\frac{\rho}{(\mu + d_2 + \sigma)} - \frac{\mu - \beta_4}{\beta_2} \right]. \blacksquare$$

Teorema 4.3

Diberikan $\hat{I}_1 = \frac{c}{b+m} - \frac{b}{\omega} > 0$,

$$\bar{R}_0 = \frac{\rho\beta_2}{(\mu + d_2 + \sigma) \left(\mu + \beta_1 \hat{I}_1 - \beta_4 \right)}$$

adalah bilangan reproduktif dasar

penyebaran virus H5N1 dan mutasi virus H5N1 dari Sistem (4.2). Jika $\bar{R}_0 > 1$, maka Sistem (4.2) mempunyai tiga titik ekuilibrium yaitu E_0 , E_1 dan E_2 . Titik $E_2 =$

$(\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R})$ merupakan

titik ekuilibrium ketiga dari Sistem (4.2), dengan

$$\hat{S}_1 = \frac{b+m}{\omega} > 0; \hat{I}_1 = \frac{c}{b+m} - \frac{b}{\omega} > 0;$$

$$\hat{S}_2 = \frac{\rho}{\mu + p + \frac{1}{2k} \left[\rho\beta_2 - k(\mu + p) + \sqrt{[\rho\beta_2 - k(\mu + p)]^2 + \frac{4\beta_2 k \rho \varepsilon p}{l}} \right]} > 0;$$

$$\hat{I}_{21} = \frac{p\rho}{l \left\{ \mu + p + \frac{1}{2k} \left[\rho\beta_2 - k(\mu + p) + \sqrt{[\rho\beta_2 - k(\mu + p)]^2 + \frac{4\beta_2 k \rho \varepsilon p}{l}} \right] \right\}} > 0;$$

dengan $\bar{R}_0 = \frac{\rho\beta_2}{k(\mu + p)} > 1;$

$$\hat{I}_{22} = \frac{1}{2\beta_2 k} \left[\rho\beta_2 - k(\mu + p) + \sqrt{[\rho\beta_2 - k(\mu + p)]^2 + \frac{4\beta_2 k \rho \varepsilon p}{l}} \right] > 0; \text{ dan}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\mu} \left[\frac{\rho p}{l \left\{ \mu + p + \frac{1}{2k} \left[\rho\beta_2 - k(\mu + p) + \sqrt{[\rho\beta_2 - k(\mu + p)]^2 + \frac{4\beta_2 k \rho \varepsilon p}{l}} \right] \right\}} + \frac{\sigma}{2\beta_2 k} \left[\rho\beta_2 - k(\mu + p) + \sqrt{[\rho\beta_2 - k(\mu + p)]^2 + \frac{4\beta_2 k \rho \varepsilon p}{l}} \right] \right] > 0.$$

(4.3)

Teorema 4.4

Diberikan $r_0 = \frac{c\omega}{b(b+m)}$, dan titik-titik ekuilibrium dari Sistem (4.1)

yaitu $P_0 = (\hat{S}_1, \hat{I}_1) = (\frac{c}{b}, 0)$ dan P_1

$$= (\hat{S}_1, \hat{I}_1) = \left(\frac{b+m}{\omega}, \frac{c}{b+m} - \frac{b}{\omega} \right).$$

i) Jika $r_0 < 1$, maka titik

ekuilibrium P_0 stabil asimtotik lokal.

ii) Jika $r_0 > 1$, maka titik ekuilibrium P_0 tidak stabil (titik saddle).

iii) Jika $r_0 > 1$, maka titik ekuilibrium P_1 stabil asimtotik lokal.

Bukti:

Persamaan karakteristik matriks Jacobian titik P_0 , yaitu $|\lambda I - J(P_0)| = 0$ sedemikian sehingga

$$(\lambda + b)\left(\lambda + (b + m) - \frac{\omega c}{b}\right) = 0.$$

i) Untuk $r_0 < 1$, maka $\lambda_1 = -b < 0$

dan $\lambda_2 = \frac{\omega c}{b} - (b + m) < 0$, maka titik P_0 stabil asimotik lokal.

ii) Untuk $r_0 > 1$, maka $\lambda_1 = -b < 0$

dan $\lambda_2 = \frac{\omega c}{b} - (b + m) > 0$, maka

titik P_0 tidak stabil (titik *saddle*).

Persamaan karakteristiknya matrik Jacobian untuk titik P_1 , yaitu $|\lambda I - J(P_1)| = 0$, berlaku:

$$\lambda^2 + \frac{\omega c}{b + m} \lambda + (b + m)b - \omega c = 0$$

Dengan menentukan nilai λ yang memenuhi persamaan kuadrat di atas, ditarik kesimpulan bahwa titik titik P_1 stabil lokal. ■

Teorema 4.5

Diberikan $R_0 = \frac{\rho \beta_2}{(\mu - \beta_4)(\mu + d_2 + \sigma)}$ dan titik ekuilibrium bebas penyakit dari

Sistem (4.2) yaitu $E_0 = \left(\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R}\right) = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\rho}{\mu}, 0, 0, 0\right)$. Jika $R_0 < 1$,

maka titik ekuilibrium E_0 stabil asimotik lokal.

i) Jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium E_0 tidak stabil (titik *saddle*).

Bukti:

Pembuktian Teorema 4.5 analog dengan pembuktian Teorema 4.4. ■

Teorema 4.6

Jika $R_0 = \frac{\rho \beta_2}{(\mu - \beta_4)(\mu + d_2 + \sigma)} > 1$ maka, titik ekuilibrium endemik $E_1 =$

$$\left(\hat{S}_1, \hat{I}_1, \hat{S}_2, \hat{I}_{21}, \hat{I}_{22}, \hat{R}\right) = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{(\mu + d_2 + \sigma)}{\beta_2}, 0, \left(\frac{\rho}{(\mu + d_2 + \sigma)} - \frac{\mu - \beta_4}{\beta_2}\right), \frac{\sigma}{\mu} \left(\frac{\rho}{(\mu + d_2 + \sigma)} - \frac{\mu - \beta_4}{\beta_2}\right)\right)$$

stabil asimotik lokal.

Bukti:

Nilai eigen dari matriks $J(E_1)$, ditentukan melalui persamaan karakteristiknya

$$|\lambda I - J(E_1)| = 0.$$

$$(\lambda - (b - \beta_3)) \left(\lambda - \left[\frac{\omega c}{b - \beta_3} - (b + m) \right] \right) (\lambda + l)(\lambda + \mu) \left(\lambda^2 + \frac{\rho \beta_2}{k} \lambda + (\rho \beta_2 - \mu k) \right) = 0$$

Dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz, Teorema 1 disimpulkan bahwa titik E_1 stabil asimtotik lokal . ■

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Jika nilai parameter ω semakin kecil maka akan mengakibatkan nilai parameter m semakin kecil. Dengan demikian nilai $\left(\frac{c}{b+m} - \frac{b}{\omega} \right)$ akan konvergen ke $\frac{c}{b}$ (jumlah maksimum dari populasi unggas). Dengan demikian peneliti memberikan saran kepada pihak pengambil kebijakan, perlu dan harus dikaji secara ilmu kesehatan tindakan preventif yang memenuhi kondisi (semakin kecil) parameter ω dan m . Sebagai tindakan preventif atas bahaya suatu virus mengacu pada bilangan reproduktif dasar (R_0). Dalam

penelitian ini, kasus wabah mutasi virus H5N1, jika selisih rasio rekrutmen total ditambah laju vaksinasi terhadap total laju dengan rasio laju kematian alami terhadap laju kontak individu rentan dengan individu yang sakit lebih dari satu, maka perlu dilakukan tindakan preventif pada populasi tersebut. Untuk kasus wabah virus utama dan mutasinya, jika rasio parameter yang terkait dengan bilangan reproduktif dasar $\left(\bar{R}_0 \right)$ lebih besar dari satu, maka pada populasi unggas dan manusia harus dilakukan tindakan preventif.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Anton, H., *Aljabar Linier Elementer*, Edisi kelima, Terjemahan Pantur Silaban dan I Nyoman Susila, Penerbit Erlangga, Jakarta; 1994.
- [2]. Alsagaff, H dan Mukty, H.,

- Dasar-dasar Ilmu Penyakit Paru*, Cetakan kedua, University Press, Surabaya; 2002.
- [3]. Arrowsmith, D.K., Place, 1992. *Dynamical System: Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*, Chapman and Hall, London; 1992.
- [4]. Bonnard, B and Chyba, M, *Singular Trajectories and their role in control theory*, Springer, Berlin; 2003.
- [5]. Conte, S.D dan de Boor, C., *Dasar-Dasar Analisis Numerik*, Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, Jakarta; 1980.
- [6]. Depkes RI, *Glosarium Data dan Informasi Kesehatan*, Depkes RI, Jakarta; 2006.
- [7]. Depkes RI, *Riset Kesehatan Dasar*, Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan RI, Jakarta; 2013.
- [8]. Derouich, M and Boutayeb, A., 2008. *An Avian Mathematical Model*, *Applied Mathematical Sciences*, Vol 2, 2008, No. 36, 1749-1760.
- [9]. Finizio, N dan Ladas, G., *Persamaan Diferensial Biasa Dengan Penerapan Modern*, Edisi ke-2, Penerbit Erlangga, Jakarta; 1998.
- [10]. Iwami, S., Takeuchi, Y., Liu, X., 2009. *Avian Flu Pandemic: Can We Prevent it?* *Journal of Theoretical Biology* 257, 181-190. *Journal home page: www.elsevier.com/locate/yjtbi*
- [11]. Hutapea Tri Andri, Kusumo Fajar Adi. *Penyebaran Virus Avian Influenza dengan Model SI – SIIR*, *Majalah Berkala MIPA UGM Volume 19* Januari 2009.
- [12]. Jung, E., Takeuchi, Y., Jo.T.C., 2009. *Optimal Control Strategy for Prevention of Avian Influenza Pandemic*. *Journal of Theoretical Biology* 260, 220-229. *Journal home page: www.elsevier.com/locate/yjtbi*.
- [13]. Jordan, D.W., and Smith, P., 2002. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford University Press.
- [14]. Kartono, M., *Flu Burung Adapted from www.Influenza*

- Report.com.By Kamps,B. S.,Hoffmann, C..*
- [15]. Kocak, H dan Hole,J.K, *Dynamic and Bifurcation*, Springer-Verlag, New-York; 1991.
- [16]. Summary of status of development and availability of A(H5N1) candidate vaccine viruses and potency testing reagents from <http://www.who.int/influenza/vaccines/virus/en/>.
- [17]. Luenberger, G.D., *Introduction to Dynamic Systems Theory, Models and Applications*, John Wilwy & Sons, New York; 1979.
- [18]. Ma, Z and Jia, L., *Dynamical Modeling and Analysis of Epidemics*, World Scientific Publishing Co. Pte.Ltd, Singapore; 2009.
- [19]. Noor, N., *Pengantar Epidemiologi Penyakit Menular*, Rineka Cipta, Jakarta; 2006.
- [20]. Olsder, G.J., *Mathematical System Theory*, Delftse Uitgevers Maatschappij, Netherlands; 1994.
- [21]. Pamuntjak, R.J. dan Santosa, W., *Persamaan Diferensial Biasa*, ITB, Bandung; 1990.
- [22]. Perko, L., *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New-yorK; 1991.
- [23]. Soejoedono, R.D. dan Handayani E., *Flu Burung*, Penebar swadaya, Jakarta; 2006.
- [24]. Soejoedono, R.D. dan Handayani E., *Flu Burung*, Penebar swadaya, Jakarta; 2006.
- [25]. Tallis, G., Septiawati, C., 2007. *Modul 2 Depkes R.I : Dasar-Dasar Flu Burung, Pandemi dan Fase-Fase Pandemi Influenza Menurut WHO*.
- [26]. Verhulst, F., *Nonlinear Differential Equation and Dyanimacal Systems*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg; 1990.