APLIKASI SIFAT-SIFAT GRUP JUMLAHAN MODULO 7 DALAM MENENTUKAN HARI

Pardomuan N. J. M. Sinambela

Abstrak

Untuk suatu keperluan tertentu, seseorang mungkin ingin mengetahui hari dari suatu tanggal tertentu. Keingintahuan ini dapat saja terjawab jika ia memiliki kalender untuk tanggal itu. Akan tetapi, jika ia tidak memiliki kalender tersebut, dan tanggal yang ingin diketahui harinya itu mempunyai rentang waktu yang sangat jauh dari tanggal sekarang, tentu tidak mudah untuk diketahui. Misalnya, seseorang mungkin tidak mengetahui hari apa tepatnya ia lahir, karena kelalaian orangtua yang hanya mencatat tanggal kelahirannya saja. Dalam tulisan ini, akan dipaparkan bagaimana menyelesaikan permasalahan menentukan hari dengan memanfaatkan sifat-sifat grup jumlahan modulo 7.

Kata Kunci : *Grup jumlahan modulo 7*

PENDAHULUAN

Himpunan residu modulo 7, yaitu $\mathbf{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, terhadap operasi jumlahan, +, membentuk *grup komutatif*. Grup ini dinamakan *grup jumlahan modulo* 7. Terpenuhinya sifat-sifat grup komutatif: ketertutupan, mempunyai elemen identitas yang unik, setiap elemennya mempunyai invers, dan sifat komutatif, dapat diperlihatkan dengan tebel Cayley berikut.

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

Sifat asosiatif, yang tidak dapat ditunjukkan dengan tabel Cayley di atas, dapat diturunkan dari sifat asosiatif bilangan bulat. Lebih jauh, grup ini merupakan *grup siklik* yang dibangkitkan oleh $1 \in Z_7$. Dengan menggunakan sifat jumlahan modulo 7 akan dibahas mengenai permasalahan menentukan hari.

Pardomuan N.J.M. Sinambela adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

PEMBAHASAN

Menentukan Hari

Berikut akan ditunjukkan beberapa contoh penggunaan sifat-sifat grup jumlahan modulo 7 untuk menentukan hari. Untuk keperluan itu, kita tentukan 0 mewakili hari Minggu, 1 mewakili hari Senin, 2 mewakili hari Selasa, …, 5 mewakili hari Jumat, dan 6 mewakili hari Sabtu.

Contoh 1. Jika sekarang hari Senin, hari apa 100 hari kemudian?

Untuk menjawab pertanyaan ini, kita awali dengan menunjukkan bahwa 100 kongruen dengan salah satu anggota $\mathbf{Z}_7$.

$$100 \equiv 1^{100} \equiv 1^{98} + 1^2 \equiv (1^7)^{14} + 2 \equiv 0^{14} + 2 \equiv 0 + 2 \equiv 2 \in \mathbf{Z}_7.$$

Jadi, 100 hari setelah hari Senin sama dengan 2 hari setelah hari Senin. Diketahui, Senin diwakili oleh 1, sehingga 100 hari setelah hari Senin dapat dinyatakan sebagai

$1 + 2 \equiv 3$, padahal 3 mewakili Rabu. Dengan demikian, 100 hari setelah hari Senin adalah hari Rabu.

Contoh 2. Jika sekarang Rabu, 9 Juni 2004, hari apakah tanggal 2 Mei 2004 yang lalu? *Jawab*: Bulan Mei mempunyai bilangan tanggal 1 sampai dengan 31, sehingga dari 2 Mei sampai 9 Juni 2004, terdapat selisih $31 - 2 + 9 = 38$ hari. Dengan demikian, penyelesaian masalah di atas ekuivalen dengan penyelesaian masalah menentukan hari apa 38 hari *sebelum* Rabu (3). Kata 'sebelum' mengindikasikan penggunaan invers, yaitu $38^{-1} \equiv (1^{38})^{-1} \equiv (1^{35} + 1^3)^{-1} \equiv ([1^7]^5 + 3)^{-1} \equiv (0^5 + 3)^{-1} \equiv 3^{-1} \equiv 4$. Jadi, 2 Mei 2004 adalah hari Minggu ($0 \equiv 3 + 4$).

Menentukan Hari dari Tanggal Tertentu

Pemanfaatan sifat-sifat grup jumlahan modulo 7 untuk menentukan hari seperti yang diperlihatkan pada **Contoh 1** dan **2,** dapat menjadi sulit diterapkan jika kita ingin mengetahui hari dari suatu tanggal tertentu. Kesulitan akan ditemui jika kita tidak punya acuan tanggal tertentu lain yang diketahui harinya, atau jika tanggal yang ingin diketahui harinya itu mempunyai selisih-hari yang sulit untuk diketahui. Sebagai contoh, meskipun kita mengetahui bahwa 9 Juni 2004 adalah hari Rabu, tetapi akan sulit bagi kita untuk mengetahui hari apa tanggal 12 Mei 1998. Untuk mengatasi kesulitan ini, berikut diberikan sebuah

Pardomuan N.J.M. Sinambela adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

formula yang memanfaatkan sifat-sifat grup jumlahan modulo 7 yang disajikan dalam bentuk kekongruenan modulo 7.

Misalkan N menyatakan bilangan tanggal dalam suatu bulan; M menyatakan bilangan bulan yang dimulai dari Maret, yaitu 1 = Maret, 2 = April, …, 10 = Desember, 11 = Januari, dan 12 = Pebruari (Pemilihan Maret sebagai awal perhitungan tahun menjadi penting, sebab pada tahun kabisat, bulan Pebruari ditambah satu hari, sehingga penambahan hari ini seolah-olah terjadi pada akhir tahun); Y menyatakan bilangan dua angka terakhir pada tahun; C menyatakan bilangan yang 'dibentuk' dari semua angka sebelum angka puluhan (misal, untuk 1945, maka C = 19 dan Y = 45); dan d menyatakan bilangan hari: 0 untuk Minggu, 1 untuk Senin, …, 6 untuk Sabtu; maka

$$d \equiv N + [2{,}6M - 0{,}2] + Y + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] - 2C - (L+1)\left[\frac{M}{11}\right] (\mathrm{mod}\ 7) \qquad (*)$$

dengan $[x] = n$ untuk $n \le x < n + 1$, $n \in Z$; L = 1 untuk tahun kabisat dan L = 0 untuk tahun yang bukan kabisat.

Formula (1) hanya berlaku untuk tanggal setelah tahun 1582. Hal ini dikarenakan sistem kalender yang kita pakai sekarang, yaitu sistem kalender Gregorian, mulai digunakan pada tahun itu.

Tahun kabisat adalah tahun yang bilangan tahunnya terbagi (habis dibagi) oleh **4**, tetapi yang bilangan tahunnya terbagi **100**, **bukan tahun kabisat**, kecuali terbagi oleh **400**. Sebagai contoh, 1984, 2000, 2004, dan 2400 adalah tahun kabisat, tetapi 1900, 1901, 2100, dan 2101 bukan tahun kabisat. Perlu ditegaskan bahwa, perhitungan tahun yang digunakan berdasarkan **Kalender Masehi**.

Sebelum kita melihat penggunaan formula (1), berikut kita paparkan bukti kebenaran formula tersebut.

Bukti: Kita asumsikan bahwa tahun 0 ada, yaitu tahun yang diawali pada 1 tahun sebelum tahun Masehi dimulai. Misalkan pada tanggal N bulan M tahun 0, bilangan hari, d, memenuhi kekongruenan modulo 7

$d \equiv N + S_M$ (mod 7)

dengan S_M suatu konstanta yang bergantung pada bilangan bulan, M. Jika kita mengamati kalender dari tahun ke tahun (bukan tahun kabisat),maka kita akan mengetahui bahwa setiap tahun, pada tanggal dan bulan yang sama, ada

Pardomuan N.J.M. Sinambela adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

pergeseran satu hari (365 ≡ **1**(mod 7)). Jadi, pada tahun T, terdapat pergeseran sebanyak T hari, sehingga untuk tahun T, ruas kanan formula (1) harus ditambah T. Akan tetapi, setiap 4 tahun kita menemui tahun kabisat, yang berarti ada penambahan pergeseran 1 hari *lagi* setiap 4 tahun (366 ≡ **2**(mod 7)), sehingga ruas kanan formula (1) harus ditambah lagi sebanyak tahun kabisat yang kurang dari atau sama dengan T, yaitu [T/4]. Ingat bahwa, meskipun bilangan tahunnya habis dibagi 4, tetapi jika bilangan tahunnya habis dibagi 100, maka tahun tersebut bukan tahun kabisat, keculai jika habis dibagi 400. Jadi, ruas kanan formula (1) harus dikurangi dengan [T/100] (ditambahkan dengan invers [T/100]) dan ditambahkan dengan [T/400]. Dengan demikian, untuk tanggal N, bulan M, tahun T, formula (1) menjadi

$$d \equiv N + S_M + T + \left[\frac{T}{4}\right] - \left[\frac{T}{100}\right] + \left[\frac{T}{400}\right] (\text{mod } 7). \qquad (2)$$

Memperhatikan kesepakatan kita tentang variabel C dan Y, maka T dapat dinyatakan sebagai $T = 100C + Y$, dengan $C = 0, 1, 2, \ldots$, dan $Y = 0, 1, 2, \ldots, 99$, sehingga formula (2) menjadi

$$d \equiv N + S_M + 100C + Y + \left[\frac{100C+Y}{4}\right] - \left[\frac{100C+Y}{100}\right] + \left[\frac{100C+Y}{400}\right] (\text{mod } 7)$$

$$\Leftrightarrow \quad d \equiv N + S_M + 100C + Y + \left[25C + \frac{Y}{4}\right] - \left[C + \frac{Y}{100}\right] + \left[\frac{C}{4} + \frac{Y}{400}\right] (\text{mod } 7).$$

Diketahui bahwa $C \in Z$, sehingga

$$d \equiv N + S_M + 100C + Y + 25C + \left[\frac{Y}{4}\right] - C - \left[\frac{Y}{100}\right] + \left[\frac{C}{4} + \frac{Y}{400}\right] (\text{mod } 7).$$

Perhatikan bahwa $\left[\frac{Y}{100}\right] = 0$, untuk setiap Y. Bagian pecahan $\frac{C}{4}$ paling besar 0,75, sedangkan $\frac{Y}{400}$ paling besar 0,2475, sehingga $\left[\frac{C}{4} + \frac{Y}{400}\right] = \left[\frac{C}{4}\right]$. Dengan demikian diperoleh

$$d \equiv N + S_M + 124C + Y + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] (\text{mod } 7)$$

Ingat bahwa, $124 \equiv 1^{124} \equiv 1^{119} + 1^5 \equiv (1^7)^{17} + 5 \equiv 5 \equiv 2^{-1} \equiv -2$, sehingga

Pardomuan N.J.M. Sinambela adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

$$d \equiv N + S_M - 2C + Y + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] (\text{mod } 7). \quad (3)$$

Untuk menentukan nilai S_M, kita memerlukan suatu tanggal yang kita ketahui harinya. Misalkan kita ambil **Senin, 1 Maret 2004**. Jadi, $d = 1$, $N = 1$, $M = 1$, $C = 20$, $Y = 4$. Jika kita substitusikan nilai-nilai ini ke formula (3), maka diperoleh

$$1 \equiv 1 + S_1 - 2(20) + 4 + \left[\frac{4}{4}\right] + \left[\frac{20}{4}\right] (\text{mod } 7)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \equiv 1 + S_1 - 40 + 4 + 1 + 5 \, (\text{mod } 7)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \equiv S_1 - 29 \, (\text{mod } 7)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \equiv S_1 - 1 (\text{mod } 7),$$

akibatnya diperoleh $S_1 \equiv 2$ (mod 7).

Jika kita memperhatikan kalender, pada tanggal (*N*) dan tahun (*C* dan *Y*) yang sama, dari bulan Maret (1) ke bulan April (2), hari bergeser tiga hari (Maret: 31 hari; 31 ≡ **3**(mod 7)), sehingga $S_2 = 2 + 3 = 5$. Selanjutnya, dari April (2) ke Mei (3), bergeser 2 hari (April: 30 hari; 30 ≡ **2**(mod 7)), sehingga $S_3 = 5 + 2 = 7$. Dengan cara yang sama, S_4, S_5, S_6, dan seterusnya, kecuali untuk S_{11}, dapat diperoleh seperti pada tabel.

Untuk S_{11}, yang dimaksud dengan pergeseran hari dari Desember ke Januari, harus pada tahun yang sama. Hal ini dikarenakan kita telah menetapkan Maret sebagai bulan pertama. Misalnya, dari Desember 2004 ke Januari 2004, bukan Januari 2005. Diketahui, dari 1 Januari sampai dengan 1 Desember pada tahun yang bukan kabisat adalah 334 hari, sehingga diperoleh 334 ≡ 5(mod 7). Dengan demikian, dari Desember ke Januari pada tanggal dan tahun yang sama, pergeseran terjadi sebanyak $5^{-1} = 2$ hari, sehingga $S_{11} = S_{10} + 2 = 25 + 2 = 27$. Pada tahun kabisat, dari 1 Januari ke 1 Desember mempunyai rentang 335 hari, sehingga diperoleh 335 ≡ 6(mod 7). Dengan demikian, dari Desember ke Januari pada tanggal dan tahun yang sama (tahun kabisat), pergeseran terjadi sebanyak $6^{-1} = 1$ hari, sehingga $S_{11} = S_{10} + 1 = 25 + 1 = 26$. Hasil ini selengkapnya diperlihatkan pada tabel berikut.

Pardomuan N.J.M. Sinambela adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

M	(+) ($L = 0$)	(+) ($L = 1$)	S_M ($L = 0$)	S_M ($L = 1$)	[2,6M – 0,2]	A	B
1	-	-	2	2	2	0 = [1/11]	0 = 2[1/11]
2	+3	+3	5	5	5	0 = [2/11]	0 = 2[2/11]
3	+2	+2	7	7	7	0 = [3/11]	0 = 2[3/11]
4	+3	+3	10	10	10	0 = [4/11]	0 = 2[4/11]
5	+2	+2	12	12	12	0 = [5/11]	0 = 2[5/11]
6	+3	+3	15	15	15	0 = [6/11]	0 = 2[6/11]
7	+3	+3	18	18	18	0 = [7/11]	0 = 2[7/11]
8	+2	+2	20	20	20	0 = [8/11]	0 = 2[8/11]
9	+3	+3	23	23	23	0 = [9/11]	0 = 2[9/11]
10	+2	+2	25	25	25	0 = [10/11]	0 = 2[10/11]
11	+2	+1	27	26	28	1 = [11/11]	2 = 2[11/11]
12	+3	+3	30	29	31	1 = [12/11]	2 = 2[12/11]

Tabel ini memperlihatkan bahwa, untuk $L = 0$ (bukan tahun kabisat), $S_M \equiv [2{,}6M - 0{,}2] + a^{-1} \equiv [2{,}6M - 0{,}2] - [M/11] \equiv [2{,}6M - 0{,}2] - (1 + L)[M/11]$. Untuk $L = 1$ (tahun kabisat), $S_M \equiv [2{,}6M - 0{,}2] + b^{-1} \equiv [2{,}6M - 0{,}2] - 2[M/11] \equiv [2{,}6M - 0{,}2] - (1 + L)[M/11]$. Dengan demikian, $S_M \equiv [2{,}6M - 0{,}2] - (1 + L)[M/11]$. Jika kita substitusikan hasil ini ke formula (3) diperoleh hasil seperti formula (*). ■

Contoh 3. ADA APA DENGAN *SWEET SEVENTEEN*. Tanggal 21 April 1999, Kartini 'genap' berumur 17 tahun. Hari apa Kartini lahir? *Jawab*: Dari permasalahan ini diketahui bahwa Kartini lahir pada 21 April 1982, sehingga $N = 21$, $M = 2$, $C = 19$, $Y = 82$, dan $L = 0$ (1982 bukan tahun kabisat). Dengan demikian,

$$d \equiv N + [2{,}6M - 0{,}2] + Y + \left[\frac{Y}{4}\right] + \left[\frac{C}{4}\right] - 2C - (L+1)\left[\frac{M}{11}\right] (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\Leftrightarrow \quad d \equiv 21 + [2{,}6(2) - 0{,}2] + 82 + \left[\frac{82}{4}\right] + \left[\frac{19}{4}\right] - 2(19) - (0+1)\left[\frac{2}{11}\right] (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\Leftrightarrow \quad d \equiv 21 + 5 + 82 + 20 + 4 - 2(19) - (0+1)0\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\Leftrightarrow \quad d \equiv 0 + 5 + 5 + 6 + 4 - 2(5) - (0+1)0\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\Leftrightarrow \quad d \equiv 10\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

$$\Leftrightarrow \quad d \equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 7)$$

Pardomuan N.J.M. Sinambela adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan

Jadi, Kartini lahir pada hari Rabu, 21 April 1982. □

Dapat diperiksa bahwa, 21 April 1999 juga hari Rabu. Hasil ini menarik, sebab ternyata setiap 17 tahun dalam abad yang sama (bukan tahun kabisat), tanggal dan bulan yang sama akan jatuh pada hari yang sama. Hal inilah yang mungkin menyebabkan ulang tahun ke 17 diistimewakan (*Sweet Seventeen*). Hal serupa juga terjadi setiap 28 tahun.

PENUTUP

Dengan memanfaatkan sifat-sifat grup jumlahan modulo 7 dapat diselesaikan permasalahan-permasalahan yang terkait dengan menentukan hari. Setiap 17 tahun pada abad yang sama ditemukan bahwa ternyata tanggal dan bulan yang dama akan jatuh pada hari yang sama, hal ini tidak berlaku untuk tahun kabisat.

DAFTAR PUSTAKA

Herstein, I. N. (2000). *Topics in Algebra*, 2nd Edition. Singapore: John Wiley & Sons (Asia) Pte. Ltd.

Niven, I dan H. S. Zuckerman, (1980). *An Introduction to the Theory of Numbers,* 4th Edition. New York: John Wiley & Sons.

Pardomuan N.J.M. Sinambela adalah Dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan